MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA I

ELEMENTOS SOBRE TEORIA DOS CONJUNTOS

Por : ***Gregório Luís***

ÍNDICE

ELEMENTOS SOBRE TEORIA DOS CONJUNTOS

1. Generalidades. Noção intuitiva de conjunto

A teoria dos conjuntos desempenha um papel fundamental em matemática pura e aplicada e foi desenvolvida a partir de meados do século XIX na sequência dos trabalhos pioneiros do lógico *Boole* e do matemático *Cantor* .

Segundo o conceito originalmente apresentado por *Cantor*, a palavra *conjunto* utiliza--se para designar qualquer colecção de objectos (números, funções, pontos do espaço, pessoas, etc.). Os objectos individuais constituintes da colecção chamam-se elementos do conjunto e diz-se que pertencem ao conjunto.

O desenvolvimento da teoria dos conjuntos e da lógica matemática vieram mostrar que o conceito original é susceptível de conduzir a contradições lógicas mas, apesar de tudo, continua sendo utilizado na apresentação elementar da teoria. Evita-se contudo considerar conjuntos que se sabe conduzirem a contradições, como é o caso, por exemplo, do *conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si próprio*: este conjunto conduz ao conhecido paradoxo de *Russell*, quando se pergunta se ele é ou não elemento de si próprio (se é, não pode ser, pela própria definição do conjunto em causa; se não é, tem de ser, também pela própria definição do conjunto em causa).

Modernamente, as contradições lógicas são evitadas recorrendo à teoria axiomática de conjuntos cuja ideia básica consiste em chamar conjuntos apenas a certas colecções com propriedades fixadas axiomáticamente. Esta via ultrapassa largamente o objectivo deste texto elementar e, por isso, seguiremos a chamada opção ingénua da teoria dos conjuntos que parte da concepção *cantoriana* de conjunto.

Como é usualmente convencionado, usaremos letras minúsculas com ou sem índices (a , b , c , ….) para representar os objectos individuais com os quais se formam as colecções a que chamamos conjuntos ; e usaremos letras maiúsculas de imprensa com ou sem índices (A , B , C , …) para representar os conjuntos formados com aqueles objectos.

Os símbolos $\in$ e $\notin$ serão usados, respectivamente, para indicar que um dado objecto pertence ou não pertence ao conjunto : $a \in X$ quer significar que o objecto a pertence ou é elemento do conjunto X ; $b \notin Y$ quer significar que o objecto b não pertence ou não é elemento do conjunto X .

Nas teorias matemáticas, ou mesmo em outras disciplinas científicas, é comum, conveniente e normalmente possível especificar exactamente quais são os objectos individuais considerados como ponto de partida. O conjunto de todos esses indivíduos será então o conjunto fundamental U , ou seja, o chamado universo do discurso. Por exemplo, em aritmética elementar o conjunto fundamental é o conjunto de todos os números inteiros não negativos.

Na teoria dos conjuntos, o conceito de *conjunto vazio* (conjunto sem elementos) é tão importante como o é o zero na teoria dos números . No entanto, a possibilidade de se considerar um conjunto sem elementos causa alguma perplexidade a quem se inicia no assunto : se na linguagem comum à palavra conjunto está associada a ideia de pluralidade, já não é sem dificuldade que se aceitam conjuntos com um só elemento, quanto mais conjuntos sem elementos.

O ideia de conjunto vazio torna-se mais aceitável recorrendo à imagem dada por *Apostol* no seu livro *Calculus* : um conjunto pode conceber-se como uma caixa em cujo interior se encontram objectos ; então, o conjunto vazio corresponde à situação em que a caixa está vazia (uma caixa vazia é, ainda assim, uma caixa). Para o conjunto vazio está consagrado o símbolo $\varnothing$.

Para evitar certas dificuldades lógicas, deve distinguir-se o objecto a do conjunto $\{a\}$ que tem aquele objecto como único elemento. Recorrendo de novo à imagem da caixa : uma caixa com apenas um lápis dentro é conceptualmente distinta do próprio lápis considerado como objecto individualizado.

Em certas teorias matemáticas e mesmo em certas situações da vida corrente interessa considerar, além de determinados objectos a , b , c , ... e conjuntos formados por tais objectos, também conjuntos formados por conjuntos de objectos a que, para simplificação de linguagem, se chamam *classes* . As classes representam-se por letras maiúsculas de tipo cursivo. Tem-se assim :

Objectos : a , b , c , ... , x , y , ...
Conjuntos : $\varnothing$ (conjunto vazio) , A , B , C , ... , U (conjunto fundamental)
Classes : O (classe vazia) , A , B , C , ... , U (classe fundamental

De notar que:

1) A classe fundamental U é a classe formada por todos os conjuntos (vazio e fundamental incluídos) ;
2) Recorrendo de novo à imagem das caixas : os conjuntos são caixas do tipo 1 tendo objectos no seu interior ; as classes são caixas de tipo 2 tendo no seu interior caixas de tipo 1 ;
3) O conjunto vazio $\varnothing$ e a classe vazia O são entidades distintas : $\varnothing$ é uma caixa do tipo 1 vazia (sem objectos no seu interior) ; O é uma caixa do tipo 2 vazia (sem caixas do tipo1 no seu interior);
4) O conjunto vazio $\varnothing$ não se confunde com a classe $\{\varnothing\}$ que tem como único elemento o conjunto vazio $\varnothing$: uma caixa do tipo 1 vazia não se confunde com uma caixa do tipo 2 com apenas uma caixa do tipo 1 vazia no seu interior.

2. Modos de definir um conjunto

Considere-se um conjunto fundamental U formado por determinados objectos bem identificados e vejamos os dois modos habitualmente usados para definir um conjunto formado por todos, alguns ou nenhum daqueles elementos .

Um primeiro modo consiste em indicar explicitamente, um por um, todos os objectos pertencentes ao conjunto (*definição exaustiva* do conjunto) , por exemplo,

$$A = \{ x , y , z , w \} \quad , \quad \varnothing = \{ \ \} \text{ (conjunto vazio) .}$$

Um segundo modo consiste em indicar uma propriedade ou condição que deva ser verificada pelos objectos a incluir no conjunto e só por esses (*definição compreensiva* do conjunto) , por exemplo,

$$A = \{x : x \in U \text{ e } x \text{ verifica a condição } c \} .$$

Se a condição c definidora do conjunto for impossível em U (nenhum $x \in U$ a verifica), então o conjunto definido é o conjunto vazio $\varnothing$. Se a condição c definidora do conjunto for universal em U (todos os $x \in U$ a verificam), então o conjunto definido é o próprio conjunto fundamental U .

Vejamos três exemplos.

1) Admita-se como conjunto fundamental o conjunto de todos os alunos aprovados num dado ano lectivo em certa disciplina leccionada numa escola e considere-se que cada aluno é identificado por um número (aluno distintos têm diferentes números). Quando consideramos o conjunto A dos alunos com os números 10, 25 e 36 , ou seja o conjunto $A = \{ 10 , 25 , 36 \}$, estamos a definir o conjunto exaustivamente. Mas se considerarmos o conjunto B dos alunos que foram aprovados com nota superior ou igual a 13, estamos a dar uma definição compreensiva do conjunto.
2) Admita-se como conjunto fundamental o conjunto $\mathbf{N}$ de todos os números naturais. O conjunto A dos números pares é um conjunto definido compreensivamente e o conjunto $B = \{ 4 , 6 , 7 , 9\}$ é um conjunto definido exaustivamente. O conjunto C dos números primos menores que 30 é um conjunto definido compreensivamente mas pode, em alternativa, ser definido exaustivamente como sendo o conjunto $C = \{ 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 \}$.
3) Admita-se como conjunto fundamental o conjunto $\mathbf{R}$ de todos os números reais. O conjunto $A = \{x : x \in \mathbf{R} \text{ e } x^2 - 1 \geq 0 \}$ é um conjunto definido compreensivamente.

3. Símbolos da lógica matemática

Em lógica, as *proposições* ou *sentenças* são afirmações susceptíveis de serem qualificadas como verdadeiras ou falsas. As *condições* são expressões contendo uma ou mais variáveis definidas em certos domínios ou conjuntos, que se transformam em proposições (verdadeiras ou falsas) quando as variáveis são substituídas por determinações particulares. Exemplos:

1) *"O número natural 3 é primo"* . Trata-se de uma proposição verdadeira.
2) *"A Lua é um satélite natural de Marte"* . Trata-se de uma proposição falsa.
3) "$x^2 - 1 \geq 0$" ($\underline{x}$ *variável real*) . Trata-se de uma condição que se transforma numa proposição verdadeira quando a variável $\underline{x}$ for substituída por um número real maior ou igual a 1 ou menor ou igual a -1 ; e que se transforma

numa proposição falsa quando a variável $\underline{x}$ for substituída por um número real $\underline{x}$ pertencente ao intervalo] -1 , 1 [.

4) *"x é pai de y"* ($\underline{x}$ *e* $\underline{y}$ *variáveis com domínio no conjunto das pessoas)* . Trata-se de uma condição que ora se transforma numa proposição verdadeira ora numa proposição falsa consoante as determinações particulares assumidas pelas variáveis $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

Nas condições, a referência expressa aos domínios das variáveis pode dispensar-se se puder razoavelmente ser subentendida. Por exemplo, na condição " $x^2 + 3x - 2 = 0$ " pode dispensar-se a indicação explícita do domínio da variável x se pelo contexto se puder subentender que se trata de uma variável real.

Na sequência usaremos frequentemente alguns símbolos lógicos que, conjuntamente com os respectivos significados e utilização, são apresentados no quadro seguinte.

Símbolos	Significado	Utilização
$\sim$	Negação	Para negar uma proposição ou condição. A negação de uma proposição é uma nova proposição que é verdadeira se a primeira for falsa e que é falsa se a primeira for verdadeira . A negação de uma condição é uma nova condição que se transforma em proposição verdadeira para os valores das variáveis que transformam a primitiva condição numa proposição falsa; e que se transforma em proposição falsa para os valores das variáveis que transformam a primitiva condição numa proposição verdadeira;
$\wedge$	e (conjunção)	Para construir a partir de duas ou mais proposições uma nova proposição que só é verdadeira quando aquelas forem conjuntamente verdadeiras. Ou para construir a partir de duas ou mais condições uma nova condição que só se transforma em proposição verdadeira para os valores das variáveis que transformam em proposições verdadeiras todas as condições intervenientes .
$\vee$	ou (disjunção)	Para construir a partir de duas ou mais proposições uma nova proposição que é verdadeira desde que pelo menos uma daquelas seja verdadeira. Ou para construir a partir de duas ou mais condições uma nova condição que se transforma em proposição verdadeira para os valores das variáveis que transformam em proposição verdadeira pelo menos uma das condições intervenientes .
$\Rightarrow$	se … , então … (implicação)	Para exprimir que, se se admitir que a proposição que antecede o símbolo é verdadeira, então necessariamente temos de admitir a veracidade da proposição consequente. Isto independentemente da veracidade ou falsidade em concreto das proposições antecedente e consequente. Quando aplicado entre condições, significa que qualquer determinação das variáveis transforma a condição antecedente numa proposição que implica a proposição em que a condição consequente se transforma para os mesmos valores das variáveis .
$\Leftrightarrow$	… se e só se … (equivalência)	Para exprimir implicação recíproca ou equivalência de duas proposições ou condições. Nota : Na equivalência " *p se e só se q* " a parte " *se* " traduz a implicação " $q \Rightarrow p$ " e a parte " *só se* " traduz a implicação " $p \Rightarrow q$ ". Observação idêntica para as condições.
$\forall$	qualquer (quaisquer) que seja (sejam) (quantificador universal)	Para indicar os conjuntos onde as variáveis das condições assumem valores que fazem com que estas cumpram certos requisitos (transformação em proposições verdadeiras, implicação de outras condições ou equivalência com outras condições). Para simplificar a escrita, é frequente omitir este quantificador sempre que, pelo contexto, os conjuntos em causa possam razoavelmente subentender-se.
$\exists$	existe (existem) (quantificador existêncial)	Para indicar que existem valores para as variáveis das condições tais que estas cumprem certos requisitos (transformação em proposições verdadeiras, implicação de outras condições ou equivalência com outras condições).
:	tal que / tais que	Utiliza-se em conjunto com o quantificador existencial $\exists$ para simbolizar a expressão " *tal que*" / " *tais que* " .

O conceito de implicação que está em causa no quadro precedente corresponde ao sentido usual do termo em matemática e não ao sentido que lhe é dado em lógica (implicação material). Assim,

a) Para se poder dizer em sentido matemático que a proposição p implica a proposição q , é preciso que seja possível concluir, mediante uma argumentação reconhecida como matematicamente válida, que se admitirmos a veracidade de p não podemos deixar de admitir a veracidade de q ;

b) Mais difícil será dizer em sentido matemático quando é que uma dada proposição p não implica uma outra proposição q , porque para tal tem de concluir-se que não existe nenhuma argumentação válida que faça decorrer da suposta veracidade de p a veracidade de q . Há no entanto um caso em que essa conclusão é fácil : quando no caso em apreço a proposição antecedente p for verdadeira e a consequente q for falsa; obviamente, nesse caso, da veracidade de p (já não suposta, mas efectiva) não pode decorrer a veracidade de q (efectivamente falsa) ;

c) O que se disse em a) e b) aplica-se à implicação de condições. Para se poder dizer em sentido matemático que a condição $p(x\ ,\ y\ , \dots\ )$ implica $q(x\ ,\ y\ , \dots\ )$, é preciso que qualquer determinação $(a\ ,\ b\ , \dots\ )$ das variáveis origine proposições $p(a\ ,\ b\ , \dots\ )$ e $q(a\ ,\ b\ , \dots\ )$ para as quais se tenha $p(a\ ,\ b\ , \dots\ ) \Rightarrow q(a\ ,\ b\ , \dots\ )$ no sentido indicado na alínea a). E as mesmas dificuldades se põem no que toca ao reconhecimento da não implicação, excepto quando se consiga encontrar uma determinação particular das variáveis para a qual a condição antecedente se transforme numa proposição verdadeira e a condição consequente numa falsa .

Exemplifica-se seguidamente a utilização de alguns dos símbolos do quadro precedente , dando particular atenção às questões levantadas relativamente à implicação.

1) $\sim (6 > 7)$. **Significado** : *Não é verdade que seis é maior que sete* (ou *seis não é maior que sete*) . Trata-se de uma proposição verdadeira.

2) $(2 + 3 = 6) \wedge (7 > 4)$. **Significado** : *A soma de dois com três é seis e sete é maior que quatro*. Trata-se de uma proposição falsa.

3) $(7 > 8) \wedge (8 > 2) \Rightarrow (7 > 2)$. **Significado** : *Se sete for maior que oito e oito for maior que dois , então sete é maior que dois*. Embora a proposição antecedente seja falsa, ela implica a consequente (que neste caso é verdadeira) porque, se admitirmos que aquela é verdadeira, então a consequente não pode deixar de ser verdadeira (transitividade da relação “ *maior que* “ entre números naturais).

4) $(7 > 8) \wedge (8 > 9) \Rightarrow (7 > 9)$. **Significado** : *Se sete for maior que oito e oito for maior que nove , então sete é maior que nove*. Embora a proposição antecedente seja falsa, ela implica a consequente (que neste caso é falsa) porque, se admitirmos que aquela é verdadeira, então a consequente não pode deixar de ser verdadeira (transitividade da relação “ *maior que* “ entre números naturais).

5) “ Q*ualquer número par maior que 2 é a soma de dois primos* “ $\Rightarrow$ “*Qualquer número ímpar maior que 3 é a soma de um numero par com um primo* “ . Não se sabe ainda se a proposição antecedente é ou não verdadeira (conjectura de Goldbach). No entanto, ela implica a proposição consequente porque, se a admitirmos como verdadeira, não poderemos deixar de considerar verdadeira a proposição consequente . Deixa-se a justificação ao cuidado do leitor.

6) Sendo $\underline{x}$ variável real , dadas as condições $x^2 - 2x > 0$, $x - 2 < 0$ e $x^2 > 1$, a condição $(x^2 > 1) \vee \{[\sim(x^2 - 2x > 0)] \wedge (x - 2 < 0)\}$ transforma-se em proposição verdadeira para os valores reais de $\underline{x}$ que :
   i) Transformem a condição $x^2 > 1$ numa proposição verdadeira ; Ou,
   ii) Transformem conjuntamente $x^2 - 2x > 0$ numa proposição falsa e $x - 2 < 0$ numa proposição verdadeira .

7) Sendo x e y variáveis reais , tem-se, $x + y = 2 \Rightarrow (x + y)\,x = 2x$. Note-se que já não poderá escrever-se que $(x + y)\,x = 2x \Rightarrow x + y = 2$. No entanto, tem-se $[(x + y)\,x = 2x] \wedge x \neq 0 \Rightarrow x + y = 2$.

8) Sendo x variável real , tem-se $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)\,x = 0$. Não é pelo facto de a condição antecedente não se transformar numa proposição verdadeira para nenhum valor da variável que ela deixa de implicar a segunda condição .

9) $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$. **Significado** : Qualquer que seja $x \in \mathbf{R}$, a condição $x^2 + x + 1 > 0$ transforma-se numa proposição verdadeira

10) $\sim [\exists x \in \mathbf{R}$, $x^2 + x + 1 \leq 0]$. **Significado** : Não existem valores reais para a variável x para os quais a condição $x^2 + x + 1 \leq 0$ se converta numa proposição verdadeira .

11) $\forall \delta \in \mathbf{R}^+$, $\exists\ n(\delta) \in \mathbf{N} : \forall n \in \mathbf{N}$, $n > n(\delta) \Rightarrow 1/n < \delta$. **Significado** : Qualquer que seja o número real positivo δ , existe um natural $n(\delta)$ tal que, qualquer que seja o natural n , se $n > n(\delta)$, então $1/n < \delta$. Nota: Para não sobrecarregar demasiado a escrita, o segundo quantificador universal pode dispensar-se se, pelo contexto, puder razoavelmente subentender-se que n é uma variável natural ficando então, $\forall \delta \in \mathbf{R}^+$, $\exists\ n(\delta) \in \mathbf{N} :$ $n > n(\delta) \Rightarrow 1/n < \delta$.

12) $\forall x \in \mathbf{R} - \{0\} \wedge y \in \mathbf{R}$, $(x + y)\,x = 2x \Rightarrow x + y = 2$. Notas : a) $\mathbf{R} - \{0\}$ é o conjunto dos reais a que se excluiu o zero; b) a quantificação da variável y pode omitir-se se estiver razoavelmente subentendido que se trata de variável real, ficando então, $\forall x \in \mathbf{R} - \{0\}$, $(x + y)\,x = 2x \Rightarrow x + y = 2$.

4. O método dedutivo

Em matemática como noutras ciências, definir um termo consiste em explicar o seu significado mediante uma proposição. Na proposição definidora entram por sua vez outros termos que devem igualmente ser definidos e assim por diante. Claro que tem de haver um terminus no processo, sob pena de sermos levados a uma regressão ao infinito ou a um círculo vicioso.

Compreende-se assim que no início de uma teoria científica se fixem determinados termos não definidos, os *termos primitivos*, apresentados sem explicação, a partir dos quais se explicarão todos os demais termos que sucessivamente vão sendo introduzidos na teoria mediante adequadas definições. O sentido a atribuir a um *termo definido* é fixado mediante uma proposição a que se dá o nome de *definição*, na qual devem apenas entrar os termos primitivos, os termos definidos previamente e os termos lógicos (variável, constante, conjunto , etc.).

A parte central de uma teoria matemática envolve enunciados (proposições) que são afirmados nessa teoria, ou seja, considerados como verdadeiros, os quais estabelecem relações entre os termos primitivos ou definidos da teoria. Em princípio é desejável que a maior parte possível dos enunciados afirmados na teoria sejam demonstrados, mas tal como no caso das definições, para se evitar uma regressão ao infinito ou um círculo vicioso, há que estabelecer enunciados que se aceitam sem demonstração (os *axiomas* ou *postulados*).

À parte os axiomas que são aceites sem demonstração, todos os demais enunciados afirmados na teoria matemática são considerados teoremas e como tal devem ser demonstrados. Nas demonstrações só é legítimo recorrer às definições, aos axiomas, aos teoremas anteriormente demonstrados [(1)] e às regras da lógica, designando-se o processo demonstrativo por dedução.

Os teoremas têm muitas vezes a forma condicional " *Se* H , *então* T " ($H \Rightarrow T$) , em que H designa uma proposição ou conjunção de proposições (as *Hipóteses*) e T representa uma outra proposição (a *Tese*). Diz-se nesse caso que H é condição suficiente de T (porque da suposta veracidade de H decorre a veracidade de T) ; ou, em alternativa, T é condição necessária de H (porque, se T for falsa, H não pode ser verdadeira).

Noutros casos, os teoremas assumem a forma de um equivalência " *A se e só se B* ", mas tais teoremas podem sempre decompor-se em dois teoremas condicionais: $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$. Neste caso, de $A \Rightarrow B$ conclui-se que B é condição necessária de A e que A é condição suficiente de B ; de $B \Rightarrow A$ conclui-se que A é condição necessária de B e que B é condição suficiente de A . Portanto, num teorema da forma $A \Leftrightarrow B$, A é condição necessária e suficiente de B e B é condição necessária e suficiente de A .

Os métodos de demonstração usados em matemática são basicamente os seguintes:

a) Método directo;
b) Método indirecto;
c) Método da indução matemática;
d) Método do contra-exemplo.

No *método directo*, parte-se das definições, axiomas e teoremas demonstrados anteriormente [(1)] e, usando as regras da lógica, tenta-se estabelecer a veracidade do teorema a demonstrar, mediante uma cadeia de implicações em que cada consequente é o antecedente da implicação seguinte até se chegar, como último consequente, ao enunciado a demonstrar .

Quando o teorema a demonstrar seja da forma $H \Rightarrow T$ (H : *Hipóteses* ; T : *Tese*), a demonstração directa assume uma forma condicional. Parte-se das definições, axio-

---
[(1)] Na teoria em causa, ou noutras que sejam prévias e amigáveis (consistentes) com aquela.

mas, teoremas demonstrados anteriormente e de H (*Hipóteses*) e, usando as regras da lógica, tenta-se provar o enunciado T (*Tese*), mediante uma cadeia de implicações em que cada consequente é o antecedente da implicação seguinte até se chegar, como último consequente, à tese T do teorema.

O *método indirecto* (também chamado *método de redução ao absurdo*) apresenta fundamentalmente duas variantes :

1ª) Admite-se como hipótese a negação do teorema e, usando o método directo na forma condicional, procura-se deduzir um enunciado que esteja em contradição com um axioma ou com um teorema já antes provado ;

2ª) Nos teoremas da forma $H \Rightarrow T$, admite-se a negação da tese como hipótese adicional (a juntar a H) e procura-se deduzir pelo método directo ;

a) um enunciado que esteja em contradição com um axioma ou com um teorema já demonstrado; ou,
b) o enunciado $\sim H$; ou,
c) o enunciado T .

Note-se que no caso da 2ª variante alínea b) o que está em causa é demonstrar, em vez de $H \Rightarrow T$, o teorema contra-recíproco $\sim T \Rightarrow \sim H$ que é equivalente àquele.

O *método de indução matemática* aplica-se em certos casos para provar a veracidade universal em $\mathbf{N}$ (conjunto dos números naturais) de uma condição dependente de uma variável natural. Procede-se do seguinte modo:

a) Prova-se que a condição se transforma numa proposição verdadeira para $n = 1$;

b) Admite-se que a condição é verdadeira para $n = p$ (hipótese de indução) e, a partir daí, prova-se que ela é igualmente verdadeira para $n = p + 1$;

c) Como consequência de a) e b) , fica provado que a condição se transforma numa proposição verdadeira para todos os valores naturais de n .

Este método pode adaptar-se ao caso em que se tenha que provar que a condição se transforma numa proposição verdadeira para todos os naturais $n \geq k$ (k natural fixo). Basta para tal adaptar o procedimento da etapa a) do método descrito, iniciando o processo de indução em $n = k$, em vez de em $n = 1$

O método de demonstração mediante *contra-exemplo* utiliza-se para demonstrar teoremas que se traduzam na negação de um enunciado universal. Por exemplo, para provar o teorema " *não é verdade que todos os números naturais ímpares são primos* ", basta indicar um exemplo de um número ímpar que não seja primo.

Ainda uma nota final sobe o método dedutivo. Ao estabelecer-se um sistema de axiomas como ponto de partida de uma teoria matemática exige-se a respectiva *consistência*, ou seja, a garantia de não ser possível deduzir dos axiomas teoremas contraditórios . É também desejável (embora não indispensável) que os axiomas sejam *independentes*, ou seja, que nenhum deles se possa demonstrar como teorema a partir dos restantes. Interessa ainda a questão de saber se a partir do sistema de axiomas fixado podem demonstrar-se como teoremas todos os enunciados verdadeiros da teoria; depois dos trabalhos do lógico Kurt Gödel sabe-se que este desiderato de completude (possibilidade de demonstrar como teoremas todos os enunciados verdadeiros da teoria) não pode ser atingido em muitas teorias .

5. Igualdade e inclusão de conjuntos

Em tudo o que se segue considera-se que os conjuntos envolvidos são formados por todos, alguns ou nenhum dos elementos de um mesmo conjunto fundamental U .

Dados dois conjuntos A e B quaisquer, diz-se que são *iguais* e escreve-se $A = B$, se e só se ,

a) A e B são ambos vazios ; ou,
b) $\forall\, x \in U \;,\; x \in A \;\Leftrightarrow\; x \in B$.

São evidentes as seguintes propriedades :

P1 : $A = A$;
P2 : $A = B \;\Rightarrow\; B = A$;
P3 : $A = B \wedge B = C \;\Rightarrow\; A = C$.

Dados dois conjuntos A e B quaisquer, diz-se que A está *contido* em B (ou é *subconjunto* de) e escreve-se $A \subseteq B$, se e só se ,

a) $A = \varnothing$; ou,
b) $\forall\, x \in U \;,\; x \in A \;\Rightarrow\; x \in B$.

São também evidentes as seguintes propriedades :

P4 : $A \subseteq A$;
P5 : $A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq A \Rightarrow\; A = B$;
P6 : $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \;\Rightarrow\; A \subseteq C$.

Quando seja $A \subseteq B$ e $A \neq B$, diz-se que A é *subconjunto próprio* de B e escreve-se $A \subset B$.

Para provar a igualdade de dois conjuntos não vazios A e B , em vez de se demonstrar que $\forall\, x \in U \;,\; x \in A \;\Leftrightarrow\; x \in B$, pode provar-se separadamente que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq A$, garantindo então a propriedade **P5** que $A = B$. Por vezes, este desdobramento da igualdade, em duas inclusões recíprocas, permite facilitar o processo demonstrativo.

Refira-se ainda que para provar que $A \subseteq B$ quando A não seja vazio, em vez de se provar que $\forall\, x \in U$, $x \in A \Rightarrow x \in B$, pode em certos casos ser mais fácil provar que $\forall\, x \in U$, $x \notin B \Rightarrow x \notin A$, sendo que ambos os enunciados são equivalentes.

Convém não confundir os símbolos $\in$ e $\subseteq$: o primeiro indica que um dado objecto pertence a um conjunto; o segundo exprime a inclusão de um conjunto noutro. Por exemplo, dado o conjunto $\{2 , 3 , 4 , 5\}$ tem-se que $2 \in \{2 , 3 , 4 , 5\}$, não sendo porém correcto escrever $2 \subseteq \{ 2 , 3 , 4 , 5 \}$; no entanto, $\{2\} \subseteq \{ 2 , 3 , 4 , 5 \}$.

Para terminar, apresentam-se dois exemplos que ilustram a técnica a usar para demonstrar uma inclusão de conjuntos .

1) Seja $U = \mathbf{R}$ (conjunto dos números reais) . Vamos mostrar que sendo,

$$A = \{x :\ x \in \mathbf{R} \ \wedge\ x^3 - 2\,x^2 + x \ \geq 0\} \quad \text{e} \quad B = \,]-2\,, +\infty\,[\ ,$$

se tem $A \subseteq B$. Como $A \neq \emptyset$, temos que provar que, $\forall\, x \in U$, $x \in A \Rightarrow x \in B$. Dado um qualquer $x \in \mathbf{R}$, tem-se :

$$x \in A \Leftrightarrow x^3 - 2\,x^2 + x \ \geq 0 \Leftrightarrow x\,(x^2 - 2\,x + 1) \ \geq 0 \Leftrightarrow x\,(x-1)^2 \ \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \ \geq 0 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow x \in B\,,$$

e, portanto , $\forall\, x \in U$, $x \in A \Rightarrow x \in B$, ou seja $A \subseteq B$.

2) Seja $U = \mathbf{N}$ (conjunto dos números naturais) . Vamos mostrar que sendo,

$$A = \{\, n :\ n \in \mathbf{N} \ \wedge\ [\forall\, m \in \mathbf{N}\ ,\ n \neq m^2]\ \}$$

$$B = \{\, n :\ n \in \mathbf{N} \ \wedge\ [\exists\, m \in \mathbf{N} :\ n = 10\, m + 7]\ \}\ ,$$

se tem $B \subseteq A$. Neste caso é mais fácil provar que $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \notin A \Rightarrow n \notin B$, do que a proposição equivalente $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \in B \Rightarrow n \in A$ que exprime directamente a inclusão a provar. Por definição do conjunto A , para qualquer $n \notin A$, existe algum $m \in \mathbf{N}$ para o qual $n = m^2$. No quadro seguinte, indicam-se, para as várias hipóteses, do algarismo das unidades desse m , quais são os algarismos das unidades de $n = m^2$:

Algarismo das unidades de m :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Algarismo das unidades de n :	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Observando a segunda linha do quadro, conclui-se que n não pode pertencer a B , porque os naturais deste conjunto têm sempre 7 como algarismo das unidades. Fica assim provado que $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \notin A \Rightarrow n \notin B$, como se pretendia.

6. Operações sobre conjuntos

Como anteriormente, considera-se que os conjuntos envolvidos na exposição são todos subconjuntos de um mesmo conjunto fundamental.

Dados dois conjuntos A e B define-se a sua *intersecção* como sendo o conjunto,

$$A \cap B = \{ x : x \in A \wedge x \in B \} .$$

Se A e B não têm elementos em comum (conjuntos *disjuntos*), a definição anterior leva a $A \cap B = \emptyset$ pois nesse caso a condição $x \in A \wedge x \in B$ é impossível .

Por outro lado, a *união* de dois conjuntos A e B define-se como sendo o conjunto,

$$A \cup B = \{ x : x \in A \vee x \in B \} .$$

Estas definições generalizam-se sem dificuldade a qualquer número finito de conjuntos, como se indica seguidamente :

a) $A \cap B \cap C = \{ x : x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C \}$;

b) $A \cup B \cup C = \{ x : x \in A \vee x \in B \vee x \in C \}$;

c) $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{ x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n \}$;

d) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{ x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n \}$.

As definições em causa podem mesmo estender-se a um número infinito de conjuntos, como se indica:

1º Caso : Para uma sucessão infinita de conjuntos ,

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{ x : \forall n \in \mathbf{N} , x \in A_n \} ;$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{ x : \exists n \in \mathbf{N} , x \in A_n \} .$$

2º Caso : Para uma classe A arbitrária com uma infinidade de conjuntos ,

$$\bigcap_{A \in \mathsf{A}} A = \{ x : \forall A \in \mathsf{A} , x \in A_n \} ;$$

$$\bigcup_{A \in \mathsf{A}} A = \{ x : \exists A \in \mathsf{A} : x \in A_n \} .$$

São fáceis de demonstrar as seguintes propriedades :

P7 : Leis comutativas : $A \cap B \;=\; B \cap C$,
$A \cup B \;=\; B \cup C$;
P8 : Leis associativas : $A \cap (B \cap C) \;=\; (A \cap B) \cap C$,
$A \cup (B \cup C) \;=\; (A \cup B) \cup C$;
P9 : Leis distributivas : $A \cap (B \cup C) \;=\; (A \cap B) \;\cup\; (A \cap C)$,
$A \cup (B \cap C) \;=\; (A \cup B) \;\cap\; (A \cup C)$;
P10 : Leis de absorção : $A \cap (A \cup B) \;=\; A$,
$A \cup (A \cap B) \;=\; A$;
P11 : Leis de idempotência : $A \cap A \;=\; A$,
$A \cup A \;=\; A$.

A *diferença* de dois conjuntos A e B define-se como sendo o conjunto,

$$A - B = \{\, x \;:\; x \in A \;\wedge\; x \notin B \,\} \;;$$

Sendo U o conjunto fundamental, a diferença $U - A = \{\, x \;:\; x \in U \;\wedge\; x \notin A \,\}$ chama-se *complementar* do conjunto A e representa-se por $\overline{A}$. Tendo em conta estas definições, são fáceis de demonstrar as seguintes propriedades :

P12 : $A - B \;=\; A \cap \overline{B}$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$; $A \cup \overline{A} = U$;
P13 : Leis de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

A título de exemplo vamos demostrar a primeira lei de De Morgan . Dado um qualquer $x \in U$, tem-se a seguinte cadeia de equivalências :

$$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \;\vee\; x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \;\vee\; x \in \overline{B} \Leftrightarrow$$

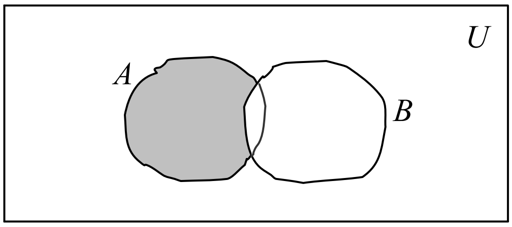
$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \,,$$

que demonstra a igualdade $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Refira-se ainda que as leis de De Morgan se generalizam para um número arbitrário (finito ou infinito) de conjuntos, ou seja, sendo A uma classe arbitrária de conjuntos , tem-se :

$$\overline{\bigcap_{A \in \mathsf{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathsf{A}} \overline{A} \qquad \text{e} \qquad \overline{\bigcup_{A \in \mathsf{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathsf{A}} \overline{A}$$

Para terminar, uma breve referência aos diagramas de Venn que são muito utilizados para representar conjuntos e permitem sugerir e entender intuitivamente (não demonstrar) relações entre conjuntos. Nestes diagramas, usa-se um rectângulo para representar o conjunto fundamental, sendo os pontos desse rectângulo considerados como os elementos desse conjunto fundamental ; os conjuntos são então representados por “círculos” interiores ao rectângulo. Por exemplo, no diagrama seguinte representam-se dois conjuntos A e B não vazios e não disjuntos e pode-se intuitivamente justificar a igualdade $A - B \;=\; A - A \cap B$:



$A - B = A - A \cap B =$ 

7. Limites de sucessões de conjuntos

Dado um conjunto fundamental U, considere-se uma sucessão de subconjuntos de U,

$$A_1 \,,\; A_2 \,,\; \ldots \,,\; A_n \,,\; \ldots \quad .$$

Designa-se por *limite máximo* da sucessão e representa-se pelo símbolo $\overline{lim}\, A_n$ o conjunto de todos os elementos de U que pertencem a uma infinidade de conjuntos da sucessão; designa-se por *limite mínimo* da sucessão e representa-se pelo símbolo $\underline{lim}\, A_n$ o conjunto de todos os elementos de U que pertencem a todos os conjuntos da sucessão de certa ordem em diante.

Quando coincidam os limites máximo e mínimo de uma sucessão de conjuntos, ao conjunto comum chama-se *limite da sucessão* e representa-se por *lim* A_n.

A partir das definições dadas demonstram-se sem qualquer dificuldade as seguintes relações:

a) $\underline{lim}\; A_n \subseteq \overline{lim}\; A_n$;

b) $\overline{lim}\; A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j \right]$;

c) $\underline{lim}\; A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j \right]$.

A relação a) decorre imediatamente das definições apresentadas. Vejamos então o caso da relação b) deixando-se o caso c) como exercício.

Tomando $x \in \overline{lim}\; A_n$ tem-se que esse x pertence a uma infinidade de conjuntos A_n da sucessão e portanto pertence necessariamente a qualquer dos conjuntos

$$\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j \quad , \; com \;\; k = 1, 2, 3, \ldots$$

pertencendo então também ao conjunto intersecção que figura no segundo membro da relação b); inversamente, sendo x um elemento pertencente ao segundo membro da relação b) vê-se que tem também de pertencer a infinitos conjuntos A_n , logo a $\overline{lim}\ A_n$.

Quando a sucessão de conjuntos for *monótona crescente*, ou seja, quando,

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$$

a aplicação das relações b) e c) acima apresentadas permite de imediato concluir que,

$$lim\, A_n = \overline{lim}\ A_n = \underline{lim}\ A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ .$$

De igual modo, quando esteja em causa uma sucessão *monótona decrescente*, ou seja, quando,

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$$

podemos concluir que,

$$lim\, A_n = \overline{lim}\ A_n = \underline{lim}\ A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \ .$$

8. Produto cartesiano de conjuntos

Sejam U_1 e U_2 dois conjuntos fundamentais iguais ou distintos. Considere-se o conjunto fundamental U formado por todos os pares ordenados (x_1, x_2) cujo primeiro elemento pertence a U_1 e o segundo a U_2 . A este conjunto chama-se *produto cartesiano* de U_1 e U_2 e representa-se por $U_1 \times U_2$:

$$U_1 \times U_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in U_1 \wedge x_2 \in U_2\} \ .$$

Dado $(a_1, a_2) \in U_1 \times U_2$, ao elemento a_1 do par chama-se *projecção de* (a_1, a_2) *no factor* U_1 e ao elemento a_2 chama-se *projecção de* (a_1, a_2) *no factor* U_2 .

Seja agora um qualquer subconjunto $C \subseteq U_1 \times U_2$ que, caso não seja vazio, tem como elementos alguns (ou todos) os pares (x_1, x_2) do conjunto fundamental $U_1 \times U_2$.

Fixando um qualquer $a_2 \in U_2$, chama-se *secção de* C *por* a_2 ao conjunto,

$$\{\, x_1 : (x_1, a_2) \in C \,\} \subseteq U_1 \,,$$

isto é, ao conjunto (eventualmente vazio) das projecções no factor U_1 de todos os elementos de C cuja projecção no factor U_2 seja a_2 . De modo análogo, fixando um qualquer $a_1 \in U_1$, chama-se *secção de* C *por* a_1 ao conjunto,

$$\{\, x_2 : (a_1, x_2) \in C \,\} \subseteq U_2 \,,$$

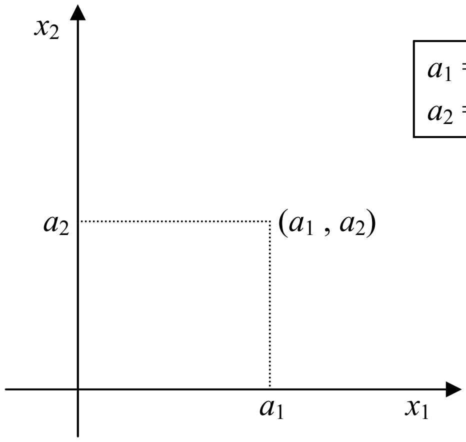
isto é, ao conjunto (eventualmente vazio) das projecções no factor U_2 de todos os elementos de C cuja projecção no factor U_1 seja a_1 .

Chama-se *projecção do conjunto* C *no factor* U_1 ao conjunto das projecções em U_1 de todos os elementos de C . De modo análogo, chama-se *projecção do conjunto* C *no factor* U_2 ao conjunto das projecções em U_2 de todos os elementos de C .

Para ilustrar os conceitos precedentes, considere-se como exemplo o caso em que U_1 e U_2 são ambos o conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais. O produto cartesiano é então o conjunto,

$$U_1 \times U_2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbf{R} \wedge x_2 \in \mathbf{R}\} ,$$

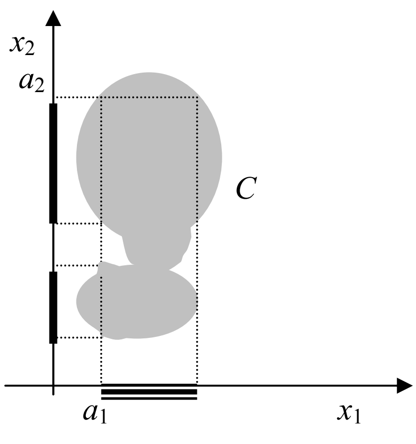
e pode representar-se geometricamente pelo conjunto dos pontos do plano, uma vez fixado um sistema de eixos coordenados, como se indica na figura seguinte, onde se representa um particular elemento $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$:



Legenda

a_1 = projecção de (a_1 , a_2) no factor $U_1 = \mathbf{R}$
a_2 = projecção de (a_1 , a_2) no factor $U_2 = \mathbf{R}$

Um conjunto $C \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ será então representado por uma região do plano formada pelos pontos que representam $(x_1 , x_2) \in C$, como se indica na figura seguinte, onde se representam também secções de C (conjunto a sombreado) por um particular $a_1 \in U_1 = \mathbf{R}$ e por um particular $a_2 \in U_2 = \mathbf{R}$:

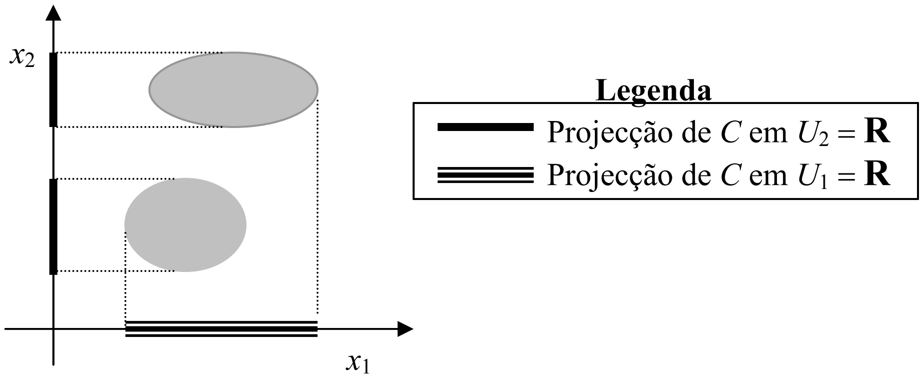


Legenda

Secção de C por a_1

Secção de C por a_2

Ainda dentro do mesmo exemplo, na figura seguinte representam-se as projecções do conjunto C a sombreado:



Voltando ao caso geral, têm particular interesse os conjuntos $C \subseteq U_1 \times U_2$ formados por todos os pares (x_1, x_2) em que $x_1 \in A_1 \subseteq U_1$ e $x_2 \in A_2 \subseteq U_2$:

$$C = \{(x_1, x_2) : x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2\} .$$

Tais conjuntos C são afinal produtos cartesianos de conjuntos $A_1 \subseteq U_1$ e $A_2 \subseteq U_2$:

$$C = A_1 \times A_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2\} .$$

Quando A_1 ou A_2 (ou ambos) sejam conjuntos vazios, não é possível formar nenhum par (x_1, x_2) com $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$ e o conjunto $C = A_1 \times A_2$ será então vazio.

As projecções de $C = A_1 \times A_2$ em U_1 e U_2 são, respectivamente, A_1 e A_2 . Por outro lado, fixado $a_1 \in A_1$ a secção de $C = A_1 \times A_2$ por a_1 será A_2 ; fixado $a_2 \in A_2$ a secção de $C = A_1 \times A_2$ por a_2 será A_1 .

Têm-se as seguintes propriedades:

P14 : $A_1 \times A_2 \subseteq B_1 \times B_2 \Leftrightarrow A_1 \subseteq B_1 \wedge A_2 \subseteq B_2$;
P15 : $(A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times A_2) = (A_1 \cup B_1) \times A_2$;
P16 : $(A_1 \times A_2) \cup (A_1 \times B_2) = A_1 \times (A_2 \cup B_2)$;
P17 : $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$.

As demonstrações destas propriedades não oferecem qualquer dificuldade. Demonstra-se a seguir apenas **P17** , deixando-se as restantes como exercício. Considerando um qualquer (x_1, x_2), tem-se:

$$\begin{aligned}
&(x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2) \wedge (x_1, x_2) \in (B_1 \times B_2) \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge x_1 \in B_1 \wedge x_2 \in B_2 \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow x_1 \in (A_1 \cap B_1) \wedge x_2 \in (A_2 \cap B_2) \Leftrightarrow \\
&\qquad \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) ,
\end{aligned}$$

ficando assim provada a igualdade desejada.

O anteriormente exposto pode generalizar-se a mais de dois factores.

Sendo U_1 , U_2 , … , U_n conjuntos fundamentais iguais ou distintos, o seu *produto cartesiano* define-se como segue:

$$U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n = \{(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) : x_1 \in U_1 \wedge x_2 \in U_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in U_n \}.$$

Fixado um particular $(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$, ao elemento a_j chama-se projecção do énuplo em causa no factor U_j . Para mais de dois factores, é também possível definir projecções de $(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ no produto cartesiano de dois ou mais factores U_j (no máximo $n-1$) : a projecção de $(a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ no produto cartesiano,

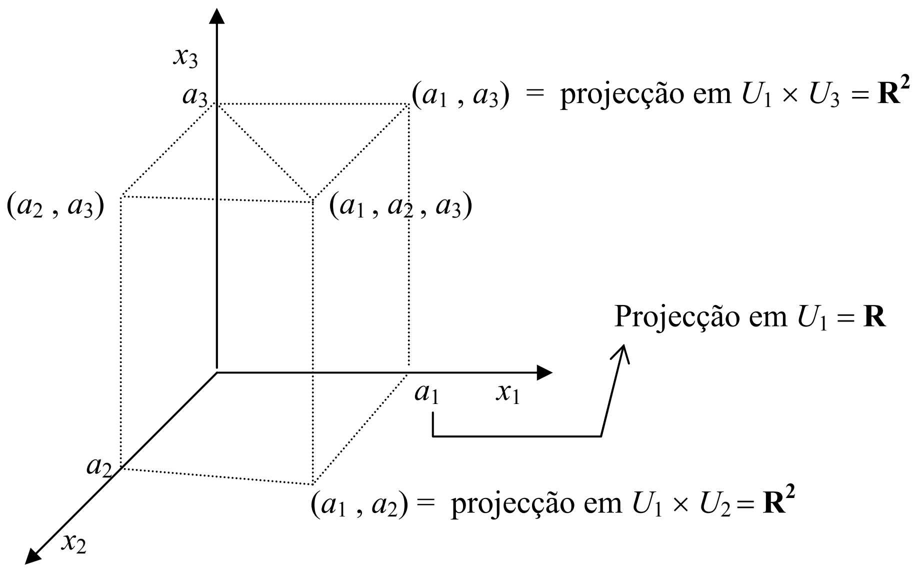
$$U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \cdots \times U_{\alpha_k} \ , \text{ com } \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k \text{ e } k \leq n-1 ,$$

é o elemento, $(a_{\alpha_1} , a_{\alpha_2} , \cdots , a_{\alpha_k}) \in U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \cdots \times U_{\alpha_k}$. Por exemplo, no caso $n = 3$, a projecção de (a_1 , a_2 , a_3) no produto cartesiano $U_1 \times U_3$ é (a_1 , a_3) .

Considerando por exemplo o caso particular $n = 3$ e $U_1 = U_2 = U_3 = \mathbf{R}$, tem-se,

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3 = \{(x_1 , x_2 , x_3) : x_1 \in \mathbf{R} \wedge x_2 \in \mathbf{R} \wedge x_3 \in \mathbf{R} \} ,$$

e este conjunto pode representar-se geometricamente pelos pontos do espaço tridimensional, uma vez que seja fixado um sistema de três eixos coordenados, como se indica na figura seguinte, onde se representa um particular $(a_1 , a_2 , a_3) \in \mathbf{R}^3$ e todas as possíveis projecções num ou em qualquer combinação de dois conjuntos factores.



Voltando ao caso geral, considere-se um qualquer $C \subseteq U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ e faça-se uma partição do conjunto dos índices 1 , 2 , … , n em dois subconjuntos disjuntos, como se indica :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k \ \text{ e } \ \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{n-k} \ , \text{ com } \ 1 \le k \le n-1 \ .$$

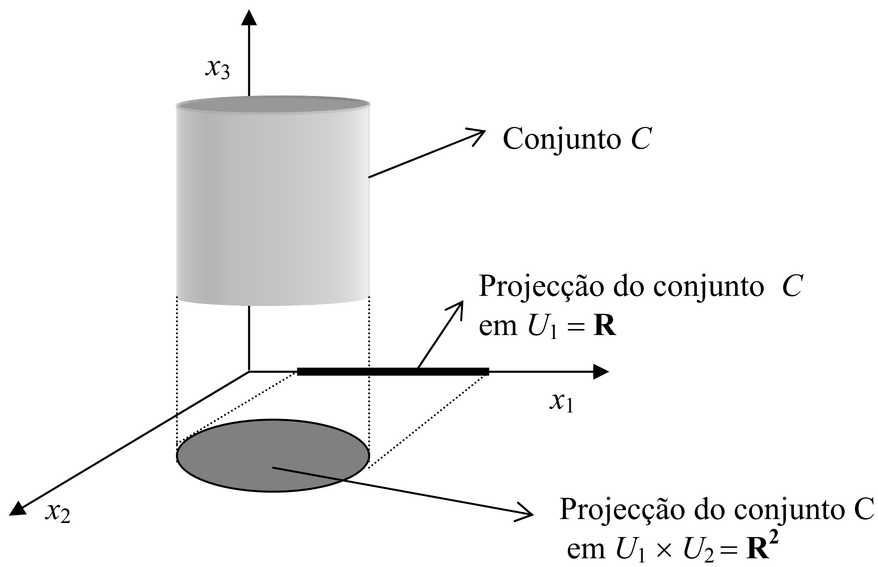
Fixando um qualquer $(a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \cdots, a_{\alpha_k}) \in U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \cdots \times U_{\alpha_k}$ chama-se *secção de* C *por* $(a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \cdots, a_{\alpha_k})$ ao conjunto,

$$\{ (x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \cdots, x_{\beta_{n-k}}) : (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in C \wedge y_{\alpha_i} = a_{\alpha_i} \wedge y_{\beta_j} = x_{\beta_j} \},$$

que é o conjunto das projecções em $U_{\beta_1} \times U_{\beta_2} \times \cdots \times U_{\beta_{n-k}}$ de todos os elementos de C cuja projecção em $U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \cdots \times U_{\alpha_k}$ é $(a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \cdots, a_{\alpha_k})$.

E chama-se *projecção de* C *em* $U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \cdots \times U_{\alpha_k}$ ao conjunto de todas as projecções dos elementos de C nesse produto cartesiano.

Retomando o exemplo em que $n = 3$ e $U_1 = U_2 = U_3 = \mathbf{R}$ e respectiva representação geométrica, na figura seguinte encontra-se representado um conjunto $C \subseteq \mathbf{R}^3$ e duas das suas possíveis projecções num só ou no produto de dois dos três factores:



Também no caso de n factores têm particular interesse os conjuntos C formados por todos os énuplos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em que $x_i \in A_i \subseteq U_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ou seja, $C = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$; claro que, tal como no caso de dois factores, C será vazio se e só se pelo menos um dos A_i for vazio. E as propriedades **P14** , **P15** , **P16** e **P17** generalizam-se sem qualquer dificuldade ; por exemplo, no caso de **P17** :

P17$^{\mathbf{G}}$ **:** $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \cap (B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \ldots \times (A_n \cap B_n)$.

9. Generalidades sobre funções

Dado um qualquer conjunto A e um outro conjunto B, se por um certo processo se faz corresponder a cada $x \in A$ um e um só $y = f(x) \in B$, diz-se que se definiu uma função f de A em B; simbolicamente, $f : A \to B$.

Ao conjunto A chama-se *domínio* da função. Por outro lado, ao conjunto,

$$f(A) = \{ y : \exists\ x \in A : y = f(x) \} \subseteq B ,$$

chama-se *contradomínio* da função. Quanto ao conjunto B, onde está contido o contradomínio da função, designa-se por *conjunto de chegada*.

Dado um qualquer conjunto $X \subseteq A$ (subconjunto do domínio) chama-se *imagem directa* de X dada por f, ao conjunto ,

$$f(X) = \{ y : \exists\ x \in X : y = f(x) \} \subseteq f(A) \subseteq B ;$$

em particular, a imagem directa do domínio da função é o respectivo contradomínio.

Por outro lado, dado um qualquer conjunto $Y \subseteq B$ (subconjunto do conjunto de chegada) chama-se *imagem inversa* de Y dada por f ao conjunto,

$$f^{-1}(Y) = \{ x : x \in A \wedge f(x) \in Y \} \subseteq A .$$

Note-se que na definição de imagem inversa o conjunto $Y \subseteq B$ não necessita estar contido no contradomínio $f(A)$ da função; claro que a condição necessária e suficiente para que $f^{-1}(Y)$ não seja vazio é que seja $Y \cap f(A) \neq \varnothing$.

Vejamos dois exemplos.

1) Dados os conjuntos $A = \{ a , b , c , d , e , f \}$ e $B = \mathbf{N}$ (conjunto dos números naturais) , considere-se a função definida pela tabela:

x	a	b	c	d	e	f
$f(x)$	313	2	2	7	9	4

tem-se,

$$\begin{aligned} &\textit{Domínio} = A = \{ a , b , c , d , e , f \} \\ &\textit{Conjunto de chegada} = \mathbf{N} \\ &\textit{Contradomínio} = f(A) = \{ 2 , 4 , 7 , 9 , 313 \} \end{aligned}$$

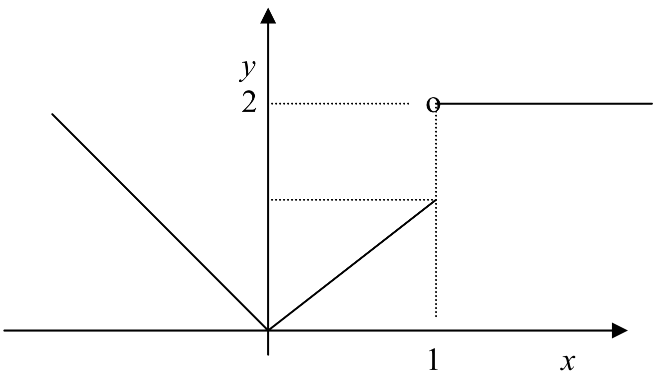
Considerando os conjuntos $X = \{ b , c , e , f \}$ e $Y = \{ n : n \in \mathbf{N} \wedge n \textit{ é par} \}$, tem-se, de acordo com as definições precedentes,

$$f(X) = \{ 2 , 4 , 9 \} \quad \text{e} \quad f^{-1}(Y) = \{ b , c , f \} .$$

2) Dados os conjuntos $A = \mathbf{R}$ (conjunto dos números reais) e $B = \mathbf{R}$, considere-se a função que a cada $x \in \mathbf{R}$ faz corresponder,

$$y = f(x) = \begin{cases} |x| & , \; x \leq 1 \\ 2 & , \; x > 1 \end{cases} ,$$

função que a seguir se representa graficamente :



tem-se,

$$\begin{aligned} &\textit{Domínio} = A = \mathbf{R} \\ &\textit{Conjunto de chegada} = \mathbf{R} \\ &\textit{Contradomínio} = f(A) = [\, 0 \; , +\infty \, [\; . \end{aligned}$$

Considerando agora os conjuntos ,

$$X_1 =]-\infty \; , 1] \; , \; X_2 = [\, 1 \; , +\infty \, [\; , \; Y_1 = [\, 2 \; , +\infty \, [\; \text{e} \; Y_2 = \{1 , 2\},$$

tem-se, de acordo com as definições precedentes,

$$f(X_1) = [\, 0 \; , +\infty \, [\quad , \quad f(X_2) = \{1 , 2\} \quad ,$$

$$f^{-1}(Y_1) = \;]-\infty , -2 \,] \cup \,]\, 1 \; , +\infty \, [\; , \; f^{-1}(Y_2) = \{-2 \; , -1 \; , \; 1 \} \cup \,]\, 1 \; , +\infty \, [\; .$$

Apresentam-se seguidamente algumas propriedades importantes das imagens directa e inversa dadas por uma função, demonstrando-se apenas as menos óbvias :

P18 : $f(X) = \emptyset \Leftrightarrow X = \emptyset$;
P19 : $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f(X_1) \subseteq f(X_2)$;

P20 : $f(\bigcap_{\alpha} X_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha} f(X_\alpha)$;

P21 : $f(\bigcup_{\alpha} X_\alpha) = \bigcup_{\alpha} f(X_\alpha)$;

Demonstração : De $X_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha} X_\alpha$ resulta , por **P19** , $f(X_\alpha) \subseteq f(\bigcup_{\alpha} X_\alpha)$, o que implica $\bigcup_{\alpha} f(X_\alpha) \subseteq f(\bigcup_{\alpha} X_\alpha)$. Para provar a igualdade, falta provar a inclusão contrária, $f(\bigcup_{\alpha} X_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha} f(X_\alpha)$: ora, tomando $y_0 \in f(\bigcup_{\alpha} X_\alpha)$ tem-se $y_0 = f(x_0)$ com $x_0 \in \bigcup_{\alpha} X_\alpha$, ou seja, com x_0 pertencente a certo X_{α_0}; então, $y_0 = f(x_0)$ pertence a $f(X_{\alpha_0})$, ou ainda , $y_0 = f(x_0) \in \bigcup_{\alpha} f(X_\alpha)$.

P22 : $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$;

P23 : $Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$;

P24 : $f^{-1}(\bigcap_{\alpha} Y_\alpha) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(Y_\alpha)$;

Demonstração : A inclusão $f^{-1}(\bigcap_{\alpha} Y_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha} f^{-1}(Y_\alpha)$ resulta de ser $\bigcap_{\alpha} Y_\alpha \subseteq Y_\alpha$ e da propriedade **P23**. Para demonstrar a inclusão contrária, tome-se $x_0 \in \bigcap_{\alpha} f^{-1}(Y_\alpha)$; deverá ser portanto, $x_0 \in A$ e $f(x_0) \in Y_\alpha$ para todos os α ; tem-se então $x_0 \in A$ e $f(x_0) \in \bigcap_{\alpha} Y_\alpha$, ou seja, $x_0 \in f^{-1}(\bigcap_{\alpha} Y_\alpha)$.

P25 : $f^{-1}(\bigcup_{\alpha} Y_\alpha) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(Y_\alpha)$;

Demonstração : A inclusão $\bigcup_{\alpha} f^{-1}(Y_\alpha) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{\alpha} Y_\alpha)$ resulta de ser $Y_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha} Y_\alpha$ e da propriedade **P23**. Para provar a inclusão contrária, tome-se $x_0 \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha} Y_\alpha)$; deverá ser portanto, $x_0 \in A$ e $f(x_0) \in \bigcup_{\alpha} Y_\alpha$, ou seja, $x_0 \in A$ e $f(x_0) \in Y_\alpha$ com certo α ; tem-se então $x_0 \in A$ e $x_0 \in f^{-1}(Y_\alpha)$ com certo α , ou ainda, $x_0 \in \bigcup_{\alpha} f^{-1}(Y_\alpha)$.

P26 : $f[f^{-1}(Y)] = Y \cap f(A)$;

Demonstração : Vejamos que $f[f^{-1}(Y)] \subseteq Y \cap f(A)$. Tomando um qualquer $y_0 \in f[f^{-1}(Y)]$, existe um $x_0 \in f^{-1}(Y)$ tal que $y_0 = f(x_0)$; mas de $x_0 \in f^{-1}(Y)$ resulta que $x_0 \in A$ e que $y_0 = f(x_0) \in Y$, ou seja,

$$y_0 = f(x_0) \in Y \cap f(A) .$$

Provemos agora a inclusão contrária, $Y \cap f(A) \subseteq f[f^{-1}(Y)]$. Tomando um qualquer $y_0 \in Y \cap f(A)$, existe um $x_0 \in A$ tal que $y_0 = f(x_0) \in Y$, assim se concluindo que $x_0 \in f^{-1}(Y)$ o que por sua vez implica ser $y_0 = f(x_0) \in f[f^{-1}(Y)]$.

P27 : $X \subseteq f^{-1}[f(X)]$;
P28 : $f(X_2) - f(X_1) \subseteq f(X_2 - X_1)$.

Considere-se uma função de A em B, seja $f : A \to B$. Diz-se que:

a) A função f é *injectiva* se e só se $f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x''$;

b) A função f é *sobrejectiva* se e só se $f(A) = B$ (isto é, se e só se o contradomínio coincide com o conjunto de chegada) ;

c) A função f é *bijectiva* (ou é uma *bijecção*) se e só se for injectiva e sobrejectiva .

Facilmente se demonstra que para as funções injectivas as inclusões provadas nas propriedades **P20** , **P27** e **P28** se transformam em igualdades. Assim,

P29 : *Sendo* $f : A \to B$ *injectiva, então* $f(\bigcap_{\alpha} X_{\alpha}) = \bigcap_{\alpha} f(X_{\alpha})$;
P30 : *Sendo* $f : A \to B$ *injectiva, então* $X = f^{-1}[f(X)]$;
P31 : *Sendo* $f : A \to B$ *injectiva , então,* $f(X_2) - f(X_1) = f(X_2 - X_1)$.

Por outro lado, sendo f sobrejectiva, a igualdade da propriedade **P26** aparece simplificada:

P32 : *Sendo* $f : A \to B$ *sobrejectiva, então* $f[f^{-1}(Y)] = Y$.

Quando uma função $f : A \to B$ seja injectiva, pode definir-se a respectiva *função inversa* f^{-1} que faz corresponder a cada $y \in f(A)$ o $x \in A$ (único, por ser f injectiva) para o qual se verifica a igualdade $f(x) = y$.

Evidentemente que o domínio da função inversa f^{-1} é $f(A)$ e, por outro lado, o respectivo contradomínio é o conjunto A . Evidentemente que sendo f^{-1} a inversa de f, será f a inversa de f^{-1} .

Caso a função f são seja injectiva no seu domínio não existe a respectiva inversa. Ainda assim, se f for injectiva num subconjunto próprio do respectivo domínio, pode a inversão efectuar-se nessa parte do domínio. Assim, se $f : A \to B$, embora não injectiva em todo o domínio, for injectiva em $A_0 \subset A$, então representando por f_0 a restrição da função f ao conjunto A_0 ,

$$f_0(x) = f(x) \text{ , para } x \in A_0 \text{ ,}$$

existe a inversa f_0^{-1} de f_0 a qual é habitualmente designada por *inversa parcial* de f em A_0 . Assim, por exemplo a função real de variável real, f: $A = [-1 , 1] \to \mathbf{R}$, tal que $f(x) = 2x^2$, não é injectiva no seu domínio e não existe portanto a respectiva inversa; no entanto, a função pode inverter-se em $A_0 = [\,0 , 1] \subset A$, sendo a correspondente inversa parcial a função, f_0^{-1} : $f(A_0) = [\,0\,,\,2]\ \rightarrow \mathbf{R}$, tal que $f_0^{-1}(y) = +\sqrt{y/2}$.

Antes de terminar estas breves considerações sobre a função inversa, convém observar que quando para uma função $f: A \rightarrow B$ existir a respectiva inversa, o símbolo $f^{-1}(Y)$ é ambíguo: pode ser considerado como representando a imagem inversa de Y dada por f ou a imagem directa do mesmo conjunto dada pela função inversa f^{-1} . Deverá no entanto notar-se que : **a)** Se o conjunto $Y \subseteq B$ não estiver contido em $f(A)$ (contradomínio de f e simultaneamente domínio de f^{-1}) a segunda interpretação não é viável porque a imagem directa dada por uma função só se define para os subconjuntos do respectivo domínio; **b)** Caso o conjunto Y esteja contido em $f(A)$ ambas as interpretações são possíveis, mas $f^{-1}(Y)$ representa o mesmo conjunto em qualquer delas como facilmente se prova.

Vejamos agora o problema da composição de funções. Considerem-se as funções,

$$g: A \rightarrow B \text{ que a cada } x \in A \text{ associa } y = g(x) \in B$$

$$f: g(A) \rightarrow C \text{ que a cada } y \in g(A) \text{ associa } z = f(y) \in C ,$$

e defina-se a função $h : A \rightarrow C$ que a cada $x \in A$ associa $h(x) = f[\,g(x)] \in C$; a esta função h chama-se *função composta* de f com g e representa-se por $f \circ g$. A f chama-se *função base* e, por outro lado, a g chama-se *função intermédia*. Convém observar que:

a) Quando o domínio de f seja mais amplo que o contradomínio de g [ou seja, quando o domínio de f contenha $g(A)$] , não há qualquer dificuldade em definir a função composta $f \circ g$, porque para todos os $x \in A$ se tem $g(x)$ a pertencer ao domínio de f;

b) Quando porém existam pontos $x \in A$ para os quais $g(x)$ não pertença ao domínio de f (desde que tal não suceda para todos os $x \in A$, porque nesse caso a composição é manifestamente impossível) é ainda possível a composição de f com a restrição de g ao conjunto A_0 dos pontos $x \in A$ para os quais $g(x)$ pertença ao domínio de f.

No estudo das propriedades da função composta pode sempre admitir-se como hipótese básica que o domínio da função base f é $g(A)$, porquanto pode sempre supor-se que: no caso a) a composição se faz restringindo o domínio de f ao conjunto $g(A)$; no caso b) a composição se faz restringindo o domínio da função intermédia g ao conjunto A_0 e se necessário o domínio de f ao conjunto $g(A_0)$. E feitas estas suposições, a função composta pode sempre considerar-se definida dentro da hipótese básica de que o domínio da função base é igual ao contradomínio da função intermédia.

Vejamos três exemplos de composição de funções.

1) Dados os conjuntos $A = \{ a , b , c , d , e , f \}$ e $B = \mathbf{N}$ (conjunto dos números naturais) , considere-se a função definida pela tabela:

x	a	b	c	d	e	f
$g(x)$	312	2	2	7	9	4

E considere-se a função f de $g(A) = \{ 2 , 4 , 7 , 9 , 312 \}$ em $\mathbf{R}$ que a cada $y \in g(A) = \{ 2 , 4 , 7 , 9 , 312 \}$ faz corresponder $f(y) = y / 3$. Nestas condições, a função composta $f \circ g$ faz corresponder a cada $x \in A = \{ a , b , c , d , e , f \}$ o número real $h(x) = f[g(x)]$ dado pela tabela :

x	a	b	c	d	e	f
$h(x)$	104	2/3	2/3	7/3	3	4/3

2) Dada a função $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que a cada $x \in \mathbf{R}$ faz corresponder o número real $g(x) = 1 - 2x$ e a função $f : [1 , +\infty[\subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que a cada $y \in [1 , +\infty[$ faz corresponder o número real $f(y) = \sqrt{y - 1}$, a composição só pode fazer-se para os valores $x \in \mathbf{R}$ que façam $g(x) = 1 - 2x \in [1 , +\infty[$ (= domínio de f) , ou seja $x \leq 0$. A função composta $f \circ g$ faz então corresponder a cada $x \in \,]-\infty , 0]$ o número real $h(x) = f[g(x)] = \sqrt{(1 - 2x) - 1} = \sqrt{-2x}$.

3) Ainda para as funções f e g do exemplo anterior a função composta $g \circ f$ faz corresponder a cada $y \in [1 , +\infty[$ o número real

$$k(y) = g[f(y)] = 1 - 2 . \sqrt{y - 1} \; .$$

Apresenta-se seguidamente uma propriedade importante :

P33 : *Sendo* $g : A \to B$ *e* $f : g(A) \to C$ *injectivas, o mesmo acontece com* $f \circ g$ *e tem-se* $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

<u>**Demonstração**</u> **:** Vejamos em primeiro lugar que $f \circ g$ é injectiva. Dados os pontos $x' , x'' \in A$ tem-se, por serem g e f injectivas,

$$x' \neq x'' \Rightarrow g(x') \neq g(x'') \Rightarrow f[g(x')] \neq f[g(x'')] \; ,$$

assim se concluindo que $f \circ g$ é injectiva.

Vejamos agora que coincidem os domínios de $(f \circ g)^{-1}$ e de $g^{-1} \circ f^{-1}$: o domínio de $(f \circ g)^{-1}$ é o contradomínio de $f \circ g$, ou seja $f[g(A)]$; o domínio de f^{-1} é o contradomínio de f, ou seja, também $f[g(A)]$; consequentemente, será também $f[g(A)]$ o domínio de $g^{-1} \text{o} f^{-1}$.

Vejamos finalmente que para cada $z_0 \in f\ [g(A)]$ se tem,

$$(f \, o \, g)^{-1}(z_0) = (g^{-1} \, o \, f^{-1})(z_0),$$

o que completará a demonstração. Por definição de função inversa, $(f \text{ o } g)^{-1}(z_0)$ será o (único) $x_0 \in A$ tal que faz $z_0 = (f \text{ o } g)(x_0) = f[g(x_0)]$; ora, tem-se,

$$(g^{-1} \text{o } f^{-1})(z_0) = g^{-1}[f^{-1}(z_0)] = g^{-1}[g(x_0)] = x_0 ,$$

uma vez que, novamente por definição de função inversa,

$$z_0 = f[g(x_0)] \Rightarrow f^{-1}(z_0) = g(x_0);$$

assim se prova que $x_0 = (f \text{ o } g)^{-1}(z_0) = (g^{-1} \ o \ f^{-1})(z_0)$ como se pretendia.

Para terminar este ponto de generalidades sobre funções convém ainda mostrar que estas se podem representar por subconjuntos especiais do produto cartesiano do domínio e conjunto de chegada.

Dada a função $f: A \to B$, seja $C_f = \{(x, y): x \in A \wedge y = f(x)\}$, conjunto que é subconjunto do produto cartesiano $A \times B = \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\}$. Claro que a projecção de C_f em A é o próprio A (domínio de f) e a projecção de C_f em B é o contradomínio de f. Além disso, como a função faz corresponder a cada $x \in A$ um só $y = f(x) \in B$, tem-se a seguinte propriedade:

P34 : *Qualquer $x \in A$ é projecção em A de um e um só par $(x, y) \in C_f$.*

Por outro lado, se $f: A \to B$ e $g: A \to B$ são funções distintas, para algum $x \in A$ se tem $f(x) \neq g(x)$ e portanto $C_f \neq C_g$.

Inversamente, dados dois conjuntos A e B arbitrários, qualquer subconjunto C de $A \times B$ que verifique a propriedade **P34**, é conjunto C_f de certa função $f: A \to B$. Com efeito, para cada $x \in A$ considere-se o $y \in B$ (único, por força de **P34**) tal que $(x, y) \in C$. Fica assim definida uma função $f: A \to B$ e evidentemente que para tal função, $C_f = C$.

10. Axioma da escolha

Há diferentes versões equivalentes deste axioma da teoria dos conjuntos, apresentando-se seguidamente aquela que se julga mais acessível. Seja A uma classe não vazia de conjuntos não vazios. O *axioma da escolha* postula que existe uma função φ com domínio em A que a cada $A \in \mathsf{A}$ associa um elemento $\varphi(A)$ pertencente ao próprio conjunto A .

A função φ a que o axioma e refere permite "escolher" de cada conjunto $A \in \mathsf{A}$ um seu representante e por isso se chama de *função de selecção* ou *selectora* . O axioma não dá nenhuma indicação de como pode construir-se em cada caso uma tal função, limitando-se a postular ou admitir a sua existência.

Se a classe A é finita, é sempre possível mediante um número finito de escolhas arbitrárias (uma escolha em cada conjunto da classe) construir a desejada função de escolha sob a forma de uma tabela. Pelo contrário, se a classe A é infinita , a construção efectiva da função de escolha obriga a definir uma regra ou processo de escolha do representante de cada conjunto, porque a realização de uma infinidade de escolhas arbitrárias é uma impossibilidade prática.

Vejamos um exemplo que permite entender melhor a dificuldade . Se a classe A for a classe de todos os intervalos limitados de números reais, tem-se evidentemente uma classe infinita de conjuntos mas não há nenhuma dificuldade em construir a função φ definindo por exemplo a seguinte regra de escolha do representante de cada intervalo da classe: cada intervalo $I \in \mathsf{A}$ tem duas extremidades finitas (por ser limitado), sejam elas a e b ; então pode definir-se a seguinte regra de escolha,

$$I \in \mathsf{A} \xrightarrow{\quad\varphi\quad} \varphi(I) = \frac{a+b}{2} \in I$$

ficando deste modo definida a função selectora. Mas admitamos agora que a classe A é a classe de todos os subconjuntos não vazios de números reais : tente o leitor definir uma regra de escolha do representante de cada conjunto da classe e logo entenderá onde está a dificuldade.

É por este motivo que alguns matemáticos são muito relutantes quanto ao uso deste axioma. A esta relutância opõem outros matemáticos o seguinte argumento: mesmo quando se não disponha de uma regra de selecção , posso sempre pensar numa função de escolha construída mediante uma infinidade de escolhas arbitrárias (uma escolha em cada conjunto da classe) que, se é certo que se trata de uma impossibilidade prática , nada impede possa ser concebida ou imaginada do ponto de vista teórico.

O axioma da escolha foi formulado pela primeira vez pelo matemático *Ernst Zermelo*, razão pela qual é também conhecido por axioma de *Zermelo* . Desde então foram feitas em vão muitas tentativas para estabelecer a veracidade do axioma, quer tentando uma demonstração directa , quer uma demonstração indirecta mediante prova de enunciados que se sabe serem equivalentes ao axioma.

São diversos e importantes os teoremas matemáticos cujas demonstrações envolvem o axioma da escolha. Embora, como se disse, grande número de matemáticos aceitem o axioma e o utilizem nas demonstrações, há outros que procuram, sempre que possível, demonstrações alternativas que evitem o recurso ao axioma.

11. Conjuntos equipotentes ou equicardinais

Dados dois conjuntos A e B dizem-se *equipotentes* ou *equicardinais* se e só se existe uma bijecção de A em B, ou seja, uma função f de A em B nas seguintes condições:

a) $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$, ou seja, f é injectiva;
b) $f(A) = B$, ou seja, f é sobrejectiva .

Para designar que dois conjuntos são equipotentes ou equicardinais usa-se qualquer dos símbolos, $A \sim B$ ou $\# A = \# B$. É evidente que: $A \sim A$; $A \sim B \Rightarrow B \sim A$; $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

12. Conjuntos finitos e infinitos. Conjuntos numeráveis e não numeráveis

Considerem-se os conjuntos,

$$J_1 = \{ 1 \} ,\ J_2 = \{ 1 , 2 \} , \dots , J_k = \{ 1 , 2 , 3 , \dots , k \} , \dots .$$

Diz-se que o conjunto A (qualquer) é *finito* se e só se é vazio ou , não o sendo, se existe um dado J_k tal que $A \sim J_k$. Os conjuntos que não sejam finitos dizem-se *infinitos.* Os conjuntos infinitos podem classificar-se em *numeráveis* ou *não numeráveis*, de acordo com as definições seguintes:

a) Um conjunto infinito diz-se *numerável* se e só se é equipotente ao conjunto $\mathbf{N}$ dos números naturais;

b) Um conjunto infinito diz-se *não numerável* se e só se não é equipotente ao conjunto $\mathbf{N}$ dos números naturais.

É fácil concluir que os elementos de um conjunto A infinito numerável podem dispor-se sob a forma de uma sucessão (dada a possibilidade de definir uma bijecção entre A e $\mathbf{N}$); inversamente, se os elementos de um conjunto A podem dispor-se sob a forma de uma sucessão (sem repetições) então tal conjunto é infinito numerável.

Uma propriedade importante dos conjuntos infinitos numeráveis é que qualquer seu subconjunto ou é finito ou numerável. Isto é, um subconjunto de um conjunto infinito numerável não pode ser infinito não numerável. Com efeito, sendo A um conjunto infinito numerável, considerem-se os respectivos elementos dispostos sob a forma de uma sucessão: $a_1 , a_2 , \dots , a_n , \dots$. Seja B um subconjunto não vazio de A e vejamos que B é necessariamente finito ou numerável. Evidentemente que todos os elementos de B entram na sucessão; seja a_{k_1} o primeiro termo da sucessão que pertence a B, seja a_{k_2} o segundo e assim por diante. Se a partir de certa ordem nenhum dos termos da sucessão pertence ao conjunto B, seja a_{k_α} o termo de mais alta ordem que pertence ao conjunto B ; neste caso, $B = \{ a_{k_1} , a_{k_2} , \dots , a_{k_\alpha} \}$ e então B é um conjunto finito. Se a partir de qualquer ordem sempre se encontram termos da sucessão que pertencem a B, então com os elementos de B pode construir--se a seguinte subsucessão da sucessão original: a_{k_1} , a_{k_2} , ... , a_{k_n} , … ; assim se conclui que B é um conjunto infinito numerável .

Para terminar, vejamos exemplos de conjuntos infinitos, numeráveis e não numeráveis:

1) O conjunto $\mathbf{N}$ dos números naturais é numerável;

2) O conjunto $\mathbf{Z} = \{ \ldots , -n , \ldots , -1 , 0 , 1 , \ldots , n , \ldots \}$ dos números inteiros é numerável. Basta notar que a função,

$$f(n) = \begin{cases} -(n+1)/2 \ , & n \quad impar \\ (n-2)/2 \ , & n \quad par \end{cases}$$

é uma bijecção de $\mathbf{N}$ em $\mathbf{Z}$.

3) O conjunto $\mathbf{Q}^+$ dos números racionais positivos é numerável. Para o mostrar, construa-se o seguinte quadro duplamente infinito onde se encontram todos os números racionais positivos (cada um deles figurando mais de uma vez):

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots \\ 2 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & 2/5 & \ldots \\ 3 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & 3/5 & \ldots \\ 4 & 4/2 & 4/3 & 4/4 & 4/5 & \ldots \\ 5 & 5/2 & 5/3 & 5/4 & 5/5 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

A partir do quadro precedente pode construir-se por um processo diagonal a seguinte sucessão, onde se encontram todas as fracções do quadro: 1, 1/2, 2, 1/3, 2/2, 3, 1/4, 2/3, 3/2, 4, 1/5, 2/4, 3/3, 4/2, 5, ...

O conjunto S das fracções precedentes é portanto numerável, mas sabe-se que o mesmo racional positivo é representado por uma infinidade daquelas fracções (por exemplo, as fracções 1/2 , 2/4, 3/6, 4/8, … representam todas o mesmo racional). Seja então I o subconjunto de S formado apenas pelas fracções irredutíveis; este subconjunto I é obviamente infinito, pois $\mathbf{N}$ é obviamente equipotente ao subconjunto I_0 de I formado pelas fracções $n/1$. Mas sendo I infinito , $I \subset S$ e S numerável, I é necessariamente numerável (ver propriedade referida no final da página anterior). Conclui-se assim que o conjunto I das fracções irredutíveis é numerável e é fácil ver que o conjunto $\mathbf{Q}^+$ é equipotente ao conjunto I (porque cada racional positivo é representado por uma e uma só fracção de I e inversamente cada uma das fracções deste conjunto representa um e um só racional positivo, sendo portanto possível estabelecer uma bijecção entre I e $\mathbf{Q}^+$) . O conjunto $\mathbf{Q}^+$ é portanto numerável.

4) O conjunto $\mathbf{Q}^-$ dos números racionais negativos é numerável. Basta notar que a função $f(r) = -r$ é uma bijecção entre $\mathbf{Q}^-$ e $\mathbf{Q}^+$.

5) O conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais é numerável. Basta notar que a função,

$$f(r) = \begin{cases} -r+1 \quad , \ r \ \textit{é racional e} \ r>1 \\ -1+1/r \, , \ r \ \textit{é racional} \ e \ \ 0<r\leq 1 \end{cases}$$

é uma bijecção de $\mathbf{Q}^+$ em $\mathbf{Q}$.

6) O conjunto $A =]\,0\,,1\,[\, \subset \mathbf{R}$ não é numerável. Para o demonstrar note-se que:

a) Qualquer número real do intervalo A pode representar-se por uma dízima infinita do tipo $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ \ldots$;
b) Mesmo os reais que possam representar-se por uma dízima finita, podem igualmente representar-se por uma dízima infinita, acrescentando zeros à direita do último algarismo significativo;
c) Se o intervalo A fosse numerável, os seus elementos poderiam dispor-se sob a forma de uma sucessão, como se indica,

$0, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ \ldots$	1º *Termo*
$0, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ \ldots$	2º *Termo*
$0, c_1\, c_2\, c_3\, c_4 \ \ldots$	3º *Termo*
$0, d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \ \ldots$	4º *Termo*
...	

Todos os elementos de A estariam na sucessão precedente e então,
d) Construindo a dízima $0, z_1 z_2 z_3 z_4 \ldots$ em que,

$$z_1 = \begin{cases} a_1 - 1 \ , \quad a_1 = 2, 3, \ldots, 9 \\ a_1 + 1 \ , \quad a_1 = 0, 1 \end{cases} \quad , \quad z_2 = \begin{cases} b_2 - 1 \ , \ b_2 = 2, 3, \ldots, 9 \\ b_2 + 1 \ , \ b_2 = 0, 1 \end{cases} \quad , \text{ Etc.}$$

conclui-se que tal dízima representa um certo real do intervalo A e que, por outro lado, este real não se encontra na sucessão referida em c) a qual supostamente teria como termos todos os elementos do referido intervalo: com efeito, a dízima $0, z_1\, z_2\, z_3\, z_4 \ldots$ difere do primeiro termo da sucessão pelo algarismo das décimas, difere do segundo termo pelo algarismo das centésimas e assim por diante; daqui resulta que,
e) O intervalo A não pode ser considerado como um conjunto numerável.

7) O conjunto $\mathbf{R}$ não é numerável. Basta notar que por exemplo a função,

$$f(x) = \begin{cases} -2 + 1/x \qquad , \ 0 < x \leq 1/2 \\ 2 \ - \ 1/(1-x) \ , \ 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

é uma bijecção de $A =]\,0\,,1\,[$ em $\mathbf{R}$.

Dentre os conjuntos infinitos não numeráveis, os que são equipotentes a $\mathbf{R}$ diz-se que têm a *potência do contínuo*.

13. Teoremas sobre equipotência de conjuntos infinitos

Os conjuntos infinitos têm uma propriedade notável que se exprime no conhecido teorema de Dedekind: *Qualquer conjunto infinito têm uma parte própria* (*um subconjunto próprio*) *que lhe é equipotente ou equicardinal.*

Antes de demonstrarmos este teorema notemos que um pouco de reflexão nos leva a concluir que este propriedade não é verificada pelos conjuntos finitos.

Exemplifiquemos também tal propriedade para o caso de um conjunto infinito. Dado o conjunto $\mathbf{N}$ números naturais e o conjunto $\mathbf{P}$ dos naturais pares, a função $f(n) = 2\,n$ é uma bijecção de $\mathbf{N}$ em $\mathbf{P}$.

Como preparação para a demonstração do teorema de Dedekind , vamos estudar dois teoremas prévios.

Teorema 1: *Qualquer conjunto infinito contém uma parte própria numerável*

Demonstração
A partir de A suposto infinito tome-se $a_0 \in A$. O conjunto $A_1 = A - \{a_0\}$ é não vazio, caso contrário A seria finito. Tome-se em A_1 um certo elemento a_1 e defina-se $A_2 = A - \{a_0 , a_1\}$, conjunto que é também não vazio (caso contrário A seria finito). Tome-se em A_2 um certo elemento a_2 e defina-se $A_3 = A - \{a_0 , a_1 , a_2\}$, conjunto igualmente não vazio. Prosseguindo indefinidamente, obtém-se o conjunto,

$$B = \{ a_0 , a_1 , a_2 , \ldots , a_n , \ldots \},$$

que é obviamente um subconjunto de A; excluindo de B o elemento a_0 obtém-se o conjunto, $B^* = \{ a_1 , a_2 , \ldots , a_n , \ldots \}$, que é evidentemente um subconjunto próprio numerável do conjunto A.

Teorema 2: *A união de dois conjuntos numeráveis ou de um conjunto numerável com um finito é igualmente um conjunto numerável.*

Demonstração
Sendo, $A = \{a_1 , a_2 , \ldots , a_n , \ldots \}$ e $B = \{b_1 , b_2 , \ldots , b_m\}$ tem-se, admitindo que A e B são disjuntos, a seguinte bijecção de $\mathbf{N}$ em $A \cup B$:

$$f(n) = \begin{cases} b_n & , \ n = 1,2,\ldots,m \\ a_k & , \ n = m+k \ \ e \ \ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Caso A e B não sejam disjuntos, tem-se $B - A$ e A disjuntos e $B - A$ finito donde, pelo demonstrado anteriormente, $A \cup B = A \cup (B - A)$ é numerável. A demonstração do teorema no caso em que B também é numerável em vez de finito, fica como exercício.

Passemos então à demonstração do teorema de Dedekind.

<u>Teorema 3</u> : *Sendo A um conjunto infinito, existe um seu subconjunto próprio que lhe é equipotente ou equicardinal* (*Dedekind*)

<u>Demonstração</u>
Sendo A infinito, seja A_0 um seu subconjunto próprio numerável (a existência deste é assegurada pelo **Teorema 1**). Façamos, $A = A_0 \cup B$, com $B = A - A_0$.

Se o conjunto B for finito ou numerável, então A também será numerável pelo **Teorema 2** . Serão então equipotentes os conjuntos A_0 e A e o teorema está demonstrado.

Se porém B for infinito não numerável, a demonstração é um pouco mais complexa. Neste caso, seja B_0 um subconjunto próprio numerável de B e façamos $B = B_0 \cup C$, com $C = B - B_0$, assim se obtendo,

$$A = A_0 \cup B = A_0 \cup B_0 \cup C = A_1 \cup C,$$

Com $A_1 = A_0 \cup B_0$ numerável (dado que A_0 e B_0 são ambos numeráveis).

Sendo A_1 e B_0 ambos numeráveis existe uma bijecção $f(x)$ de A_1 em B_0 . Podemos então definir, a partir de $f(x)$ a seguinte bijecção de $A = A_1 \cup C$ em $B = B_0 \cup C$:

$$g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in C \\ f(x) & , \quad x \in A_1 \end{cases}$$

Fica como exercício verificar que: 1) A definição de $g(x)$ não envolve qualquer ambiguidade, dado que os conjuntos C e A_1 são disjuntos; 2) A função g é efectivamente uma bijecção.

Então A e B são equipotentes e B é um subconjunto próprio de A. O teorema está demonstrado.

Com praticamente a mesma demonstração, podem estabelecer-se ainda os dois seguintes teoremas:

<u>Teorema 4</u> : *Se a um conjunto infinito não numerável retirarmos um subconjunto próprio finito ou numerável, obtém-se um conjunto equipotente ao primeiro.*

<u>Demonstração</u>
Seja A_0 um subconjunto próprio finito ou numerável do conjunto não numerável A e faça-se $B = A - A_0$. Claro que B é não numerável, caso contrário A também seria numerável (**Teorema 2**). Considere-se agora um subconjunto próprio numerável do conjunto B, seja B_0 , e faça--se $C = B - B_0$. Claro que então $B = B_0 \cup C$, com B_0 numerável e evidentemente C não numerável. Então $A = A_0 \cup B_0 \cup C = A_1 \cup C$ e também $B = B_0 \cup C$ com A_1 e B_0 numeráveis. Por um processo semelhante ao seguido na demonstração do **Teorema 3**, pode concluir-se que A e B são equipotentes.

Teorema 5 : *Fazendo a união de um conjunto infinito não numerável com um conjunto finito ou numerável, obtém-se um conjunto equipotente ao primeiro.*

Demonstração
Seja B infinito não numerável e A_0 finito ou numerável. Sem perda de generalidade admite-se que B e A_0 são disjuntos; se o não forem, dado que $B \cup A_0 = B \cup (A_0 - B)$, a demonstração faz-se utilizando $A_0 - B$ que é igualmente um conjunto finito ou numerável.

Supondo então que B e A_0 são disjuntos, faça-se $A = A_0 \cup B$ e seja B_0 um subconjunto próprio numerável de B. Tem-se então $B = B_0 \cup C$, com B_0 numerável e C não numerável. Resulta então,

$$A = A_0 \cup B_0 \cup C = A_1 \cup C \quad \text{e} \quad B = B_0 \cup C$$

com A_1 e B_0 numeráveis. Agora, por um processo semelhante ao seguido na demonstração do **Teorema 3**, pode concluir-se que A e B são equipotentes como se pretende.

Vejamos dois exemplos de aplicação dos teoremas 4 e 5:

1) Já vimos que o intervalo $]\,0\,,\,1\,[$ é não numerável e que, por outro lado, esse intervalo e o conjunto $\mathbf{R}$ são equipotentes (ambos têm a potência do contínuo). O **teorema 5** permite então concluir que são equipotentes a $\mathbf{R}$ os seguintes intervalos:

$$[\,0\,,1\,] \;\; ; \;\; [\,0\,,1\,[\;\; ; \;\;]\,0\,,1\,]$$

porque qualquer deles se obtém como a união do intervalo $]\,0\,,\,1\,[$ com um conjunto finito.

2) O conjunto $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ são equipotentes. Resulta imediatamente do **teorema 4** e do facto de $\mathbf{Q}$ ser numerável.

14. Comparabilidade das potências de conjuntos. Teoremas de Bernstein e de Cantor

Para comparar dois conjuntos do ponto de vista dos respectivos cardinais ou potências não é preciso proceder à contagem dos respectivos elementos, mesmo no caso finito.

Com vista a esclarecer esta questão começa-se por estudar o seguinte teorema:

Teorema 6 : *Sendo A e B conjuntos quaisquer, se existem subconjuntos $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$ tais que $A \sim B'$ e $B \sim A'$, então também A e B são equipotentes. Por outras palavras, dados dois conjuntos se cada um deles é equipotente a uma parte do outro, então eles são equipotentes* (*Bernstein*).

Demonstração
Seja f a bijecção de A em B' e g a bijecção de B em A'. Definam-se os seguintes conjuntos:

$$\begin{array}{ll} A_0 = A - A' & B_0 = B - B' \\ A_1 = g(B_0) & B_1 = f(A_0) \\ A_2 = g(B_1) & B_2 = f(A_1) \\ A_3 = g(B_2) & B_3 = f(A_2) \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

$$A_\infty = A - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \qquad B_\infty = B - \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$$

Pode ver-se sem dificuldade que os A_n são dois a dois disjuntos e que o mesmo acontece com os conjuntos B_n. Atendendo a que f é uma bijecção de A em B', comclui-se que,

$$f(A_\infty) = f(A) - \bigcup_{n=0}^{\infty} f(A_n) = B' - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B - B_0 - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B - \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = B_\infty .$$

Considere-se então a seguinte função de A em B ,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in A_0 \cup A_2 \cup A_4 \cup \ldots \\ f(x) & , x \in A_\infty \\ g^{-1}(x) & , x \in A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup \ldots \end{cases}$$

cuja definição não envolve qualquer ambiguidade, dado serem os A_n dois a dois disjuntos. Prova-se sem qualquer dificuldade que h é injectiva, por serem f e g bijectivas; por outro lado, conclui-se que h é sobrejectiva:

$$h(A) = f(A_0 \cup A_2 \cup A_4 \cup \ldots) \cup g^{-1}(A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup \ldots) \cup f(A_\infty) =$$

$$= (B_1 \cup B_3 \cup B_5 \cup \ldots) \cup (B_0 \cup B_2 \cup B_4 \cup \ldots) \cup B_\infty = B .$$

Existe portanto uma bijecção de A em B. Logo A e B são equipotentes como se queria provar.

O Teorema que acaba de ser demonstrado tem o seguinte corolário:

Corolário : *Sendo* $C \subseteq B \subseteq A$ *e* $A \sim C$, *então também* A *e* B *são equipotentes.*

Demonstração
Basta aplicar o teorema de Bernstein com $B' = C$ e $A' = B$.

Dados dois conjuntos A e B, admita-se que não são equipotentes. Em tais condições, se existir um $B' \subset B$ tal que $A \sim B'$, diz-se que o *conjunto B tem potência ou cardinal superior ao conjunto A.* Refira-se a propósito que o **teorema 6** afasta a possibilidade de ter-se ao mesmo tempo um A' contido em A tal que $B \sim A'$, porque então A e B seriam equipotentes.

Vejamos alguns exemplos:

1) A potência de $\mathbf{R}$ é superior à de $\mathbf{Q}$. Com efeito, não pode estabelecer-se uma bijecção de $\mathbf{Q}$ em $\mathbf{R}$ (caso contrário $\mathbf{R}$ seria numerável, o que já vimos ser falso); mas pode estabelecer-se uma bijecção de $\mathbf{Q}$ em $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

2) A potência de $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ é superior à de $\mathbf{Q}$ (há "mais" irracionais que racionais). De facto, como vimos $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ não é numerável, logo não pode definir-se uma bijecção de $\mathbf{Q}$ em $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$; mas pode estabelecer-se uma bijecção de $\mathbf{Q}$ em,

$$B' = \{\, u : \ u = x + \sqrt{2} \ , \textit{com certo } \ x \in \mathbf{Q} \,\} \subset \mathbf{R} - \mathbf{Q} \,,$$

bastando considerar a função $h(x) = x + \sqrt{2}$ de $\mathbf{Q}$ em B'.

Para terminar, vamos estudar o teorema de *Cantor* que responde à questão de saber se há ou não conjuntos com potência superior à do contínuo.

<u>**Teorema 7**</u> **:** *Sendo X um qualquer conjunto e* $\mathcal{P}(X)$ *o conjunto de todos os subconjuntos de X, então* $\mathcal{P}(X)$ *tem potência superior à de X* (*Cantor*).

<u>**Demonstração**</u>

Temos de provar em primeiro lugar que X e $\mathcal{P}(X)$ não são equipotentes, ou seja que não existe nenhuma bijecção de X em $\mathcal{P}(X)$.

Admitindo por absurdo a existência de uma tal bijecção f, defina-se o conjunto,

$$M = \{\, x : \ x \in X \ e \ x \notin f(x) \,\} \,,$$

devendo notar-se que, para cada $x \in X$, $f(x)$ é um conjunto da classe $\mathcal{P}(X)$. Claro que o conjunto M está contido em X. Seja m o elemento de X que faz $f(m) = M$: tal elemento tem de existir, porque f é uma bijecção de X em $\mathcal{P}(X)$ e $M \in \mathcal{P}(X)$. Analisemos então cada uma das seguintes hipóteses:

a) Se for $m \notin M = f(m)$, mostra a definição de M que deveria ter-se m pertencente a $f(m) = M$, o que é absurdo;

b) Se for $m \in M = f(m)$, mostra a definição de M que deveria ter-se m não pertencente a $f(m) = M$, o que também é absurdo.

Para completar a demonstração do teorema, basta mostrar que existe uma bijecção de X numa parte de $\mathcal{P}(X)$. Considerando a classe,

$$\mathcal{P}^* = \{\ \{x\} : x \in X\ \} \subset \mathcal{P}(X)\ ,$$

tem-se a seguinte bijecção de X em $\mathcal{P}^*$: $h\,(x) = \{x\} \in \mathcal{P}^*$.

O teorema está completamente demonstrado.

Como consequência deste teorema, conclui-se não apenas que há conjuntos com potência superior à do contínuo (por exemplo, a classe de todos os subconjuntos de $\mathbf{R}$), como ainda que não existe um limite superior para a potência dos conjuntos: pois dado um qualquer conjunto há sempre um outro com potência superior, a saber, a classe de todos os subconjuntos desse conjunto.

15. Exercícios

1. Seja $U = \{ a , b , c , d \}$ e $B = \{ a , b , c \}$. Defina a classe B de todos os subconjuntos de B ($\varnothing$ e B inclusivé), indicando de modo exaustivo todos os seus elementos.

2. Seja $U = \mathbf{N}$ e considerem-se os conjuntos,

$$A = \{ n : n \in \mathbf{N} \wedge n > 5 \wedge n \text{ é primo} \}$$

$$B = \{ n : n \in \mathbf{N} \wedge [\forall m \in \mathbf{N} , n \neq 10\, m + 5] \} .$$

Alguma das seguintes inclusões $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$ é verificada ? Justifique.

3. Seja $U = \mathbf{R}$ e considerem-se os conjuntos,

$$A = \{ x : x \in \mathbf{R} \wedge x^2 \geq 3\, x \} \quad , \quad B = \{ x : x \in \mathbf{R} \wedge x^3 \leq -x \} \; ,$$

$$C = \{ x : x \in \mathbf{R} \wedge x \leq 0 \} .$$

Estabeleça as eventuais relações de igualdade ou inclusão entre os conjuntos dados.

4. Seja $U = \mathbf{N}$ e considerem-se os conjuntos,

$$A = \{ n : n \in \mathbf{N} \wedge [\forall m \in \mathbf{N} , n \neq m^2] \}$$
$$B = \{ n : n \in \mathbf{N} \wedge [\exists\, m \in \mathbf{N} : n = 10\, m + 2] \} .$$

Mostre que $B \subseteq A$.

5. Considere como conjunto fundamental o conjunto $\mathbf{N}$ dos números naturais e sejam,

$$A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 \}$$
$$B = \{ n : n \in \mathbf{N} \wedge n \text{ é par} \} .$$

Determine cada um dos conjuntos das alíneas seguintes, dando deles uma definição compreensiva e, sempre que possível, também uma definição exaustiva:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A - B$; d) $B - A$; e) $\overline{A} - \overline{B}$; f) $\overline{B} - \overline{A}$.

6. Considere como conjunto fundamental o conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais e sejam,

$$A = [0 , 2] \quad , \quad B = \{ x : x^2 > 1 \} \text{ e } C = \{ x : x^3 - x^2 - 2\, x = 0 \} .$$

Determine os conjuntos seguintes:

a) $A \cap B$; b) $A \cap B \cap C$; c) $(A \cap B) - C$; d) $(A - B) - C$; e) $(A \cup B) - C$.

7. Demonstre as seguintes igualdades entre conjuntos:

a) $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup B$;
b) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$;
c) $A \cup B \cup C = A \cup (B - A) \cup [C - (A \cup B)]$;
d) $A \cap (A \cup B) = A$;
e) $A - B = A - (A \cap B)$;
f) $A - B = A \cap \overline{B}$.

8. Admitindo que $A \subseteq B$, justifique as seguintes igualdades :

a) $A \cup B = B$; b) $A \cap B = A$; c) $A - B = \emptyset$.

9. Prove que a condição necessária e suficiente para que um conjunto $A \subseteq U$ seja vazio é que exista um conjunto $T \subseteq U$ tal que $T = (A - T) \cup (T - A)$.

10. Sendo $A_1, A_2, \dots, A_n$ subconjuntos de B , mostre que :

a) $B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (B - A_i)$; b) $B - \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (B - A_i)$.

11. Considere a seguinte sucessão de subconjuntos de $\mathbf{R}$:

$$A_n = [\, 1/n \ , \ 1 + 1/n \,]$$

a) Calcule $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$;

b) Calcule $\overline{lim}\ A_n$ e $\underline{lim}\ A_n$ e indique se existe $lim\ A_n$.

12. Considere a seguinte sucessão de intervalos de números reais :

$$I_n = [\, 1 \ , \ 2 + (-1)^n \, . \, 1/n] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

a) Determine o conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbf{R} - I_{2n})$;

b) Estude a existência de $lim\ I_n$.

13. Considere a seguinte sucessão de subconjuntos de $\mathbf{N}$:

$$A_n = \{2 + (-1)^n , 3 + (-1)^n , 4 + (-1)^n , 6 , 7 , \dots , n + 5\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

a) Estude a existência de $lim\ A_n$;

b) Determine o conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1})$.

14. Considere a seguinte sucessão de subconjuntos de $\mathbf{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
A_n &= \{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 1/n\} \quad (n \text{ par}) \\
&= \{(x, y) : -1 + 1/n \leq x + y \leq 0\} \quad (n \text{ ímpar})
\end{aligned}
$$

a) Determine o conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbf{R}^2 - A_{2n})$;

b) Estude a existência de $\lim A_n$.

15. Considere a seguinte sucessão de subconjuntos de $\mathbf{R}$:

$$A_n = \begin{cases} [0 \ , \ 1 + 1/n] & , \ n \ \ par \\ ]-1/n \ , \ 0] & , \ n \ \ impar \end{cases}$$

a) Calcule $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$;

b) Calcule $\overline{\lim}\, A_n$ e $\underline{\lim}\, A_n$ e indique se existe $\lim\, A_n$.

16. Prove que,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup \left\{ \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[A_n - \left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \right) \right] \right\}$$

17. Sendo E_n uma sucessão de conjuntos e existindo $\lim E_n$, mostre que também existe o limite da sucessão $\overline{E_n}$ dos complementares e que,

$$\lim \overline{E_n} = \overline{\lim E_n} \quad .$$

18. Sendo E_n e F_n sucessões de conjuntos e existindo os respectivos limites, prove que também existe limite de $E_n \cup F_n$ e que,

$$\lim (E_n \cup F_n) = \lim E_n \cup \lim F_n$$

19. Prove que sendo E_n uma sucessão de conjuntos com limite, então para qualquer subsucessão E_{α_n} tem-se $\lim E_n = \lim E_{\alpha_n}$.

20. Considere um conjunto fundamental U e dois particulares subconjuntos A e B de U . Seja C a classe dos subconjuntos C de U que verificam conjuntamente as relações $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$. Mostre que existe e determine um conjunto $P \in \mathsf{C}$ tal que : $\forall\, C \in \mathsf{C}$, $C \subseteq P$.

21. Sejam $U_1 = \{ a , b , c , d , e \}$ e $U_2 = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 \}$ e considere o conjunto $C = \{(a , 1) ; (a , 2) ; (b , 3) ; (b , 7) ; (d , 2) ; (d , 9) ; (e , 2) \}$. Determine:

a) A secção de C por $2 \in U_2$;
b) A secção de C por $a \in U_1$;
c) A secção de C por $5 \in U_2$;
d) A projecção de C em U_1;
e) A projecção de C em U_2.

22. Sejam $U_1 = U_2 = \mathbf{R}$ e considere o conjunto

$$C = \{(x\,,y) \;:\; x \in [-1\,,1] \wedge 0 \leq y \leq x^2\} \subset U_1 \times U_2 = \mathbf{R}^2 .$$

Determine:

a) A secção de C por $y = 1/4 \in U_2 = \mathbf{R}$;
b) A secção de C por $x = -1/2 \in U_1 = \mathbf{R}$;
c) A secção de C por $y = 1 \in U_2 = \mathbf{R}$;
d) A secção de C por $y = 2 \in U_2 = \mathbf{R}$;
e) As projecções de C nos factores U_1 e U_2.

23. Sejam $U_1 = U_2 = U_3 = \mathbf{R}$ e considere o conjunto

$$C = \{(x\,,y\,,z) \;:\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset U_1 \times U_2 \times U_3 = \mathbf{R}^3 .$$

Determine:

a) A secção de C por $(0\,,0) \in U_1 \times U_2 = \mathbf{R}^2$;
b) A secção de C por $z = 0 \in U_3 = \mathbf{R}$;
c) A secção de C por $z = 1 \in U_3 = \mathbf{R}$;
d) A projecção de C no produto $U_1 \times U_2$.

24. Sejam $A_1 \subseteq U_1$, $B_1 \subseteq U_1$ e $A_2 \subseteq U_2$ e $B_2 \subseteq U_2$. Prove que:

a) $A_1 \times (A_2 - B_2) = A_1 \times A_2 - A_1 \times B_2$;
b) $(A_1 - B_1) \times (A_2 - B_2) \subseteq A_1 \times A_2 - B_1 \times B_2$;

Relativamente a b) recorra a um contra-exemplo para mostrar que não pode garantir-se a igualdade dos dois conjuntos envolvidos.

25. Considere a função $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ tal que, $f(n) = (-1)^n$.
a) Dados $A = \{1\,,3\,,5\,,7\}$ e $B = \{2\,,4\}$, $f(A)$ e $f(B)$;
b) Dados $X_1 =]-\infty\,,0\,]$ e $X_2 = \{0\}$, determine $f^{-1}(X_1)$ e $f^{-1}(X_2)$;

26. Considere a função $f : A = [\,0\,,1] \cup [\,2\,,+\infty\,[\;\to \mathbf{R}$ tal que,

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 1 & , \quad x = 1 \vee x \geq 2 \end{cases} .$$

a) Dados $X_1 = [\,0\,,1]$ e $X_2 = \{1\} \cup [\,2\,,3]$, determine $f(\,X_1)$ e $f(\,X_2)$;

b) Determine $f^{-1}(\,\mathbf{R}^{+})$, $f^{-1}(\,]\,1\,,+\infty\,[\,)$ e $f^{-1}(\,[\,0\,,3]\,)$.

27. Considere a função $f : A = \{(x\,,y) : x^2+y^2 \leq 1\,\} \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ tal que,

$$f(x\,,y) = 2\cdot\sqrt{x^2+y^2}\;.$$

Dados os conjuntos $X = A \cap \{\,(x\,,y) :\ x \geq 0 \ \wedge\ y \geq 0\,\}$, $Y_1 = [\,3/2\,,+\infty\,[$ e $Y_2 = \,]-\infty\,,0]$, determine $f(\,X\,)$, $f^{-1}(Y_1)$ e $f^{-1}(Y_2)$.

28. Considere uma função $f : A \rightarrow B$ e sejam $X_n \subseteq A$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Mostre que $f(\,\overline{lim}\,X_n\,) \subseteq \overline{lim}\,f(X_n)$ e que $f(\,\underline{lim}\;X_n\,) \subseteq \underline{lim}\;f(X_n)$;

b) Através de um exemplo conveniente mostre que pode ter-se,

$$f(\,\overline{lim}\,X_n\,) \neq \overline{lim}\,f(X_n) \quad \text{e} \quad f(\,\underline{lim}\;X_n\,) \neq \underline{lim}\;f(X_n)\,;$$

c) Mostre que sendo f uma função injectiva, as inclusões da alínea a) se transformam em igualdades.

29. Considere uma função $f : A \rightarrow B$ e sejam $Y_n \subseteq B$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Mostre que,

$$f^{-1}(\,\overline{lim}\,Y_n\,) = \overline{lim}\;f^{-1}(Y_n) \quad \text{e} \quad f^{-1}(\underline{lim}\;Y_n\,) = \underline{lim}\;\;f^{-1}(Y_n)\,.$$

30. Considere uma função $f : A \rightarrow B$ e sejam $Y\,,Z \subseteq B$. Mostre que se verifica a igualdade: $f^{-1}(\,Y - Z\,) = f^{-1}(\,Y\,) - f^{-1}(\,Z\,)$.

31. Seja $f : A \rightarrow B$. Prove que são equivalentes as cinco seguintes propriedades:

a) f é injectiva ;

b) $\forall\, X \subseteq A$, $f^{-1}[\,f(\,X\,)] = X$;

c) $\forall\, X_1\,, X_2 \subseteq A$, $f(\,X_1 \cap X_2\,) = f(\,X_1\,) \cap f(\,X_2\,)$;

d) $\forall\, X_1\,, X_2 \subseteq A$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing \Rightarrow f(\,X_1\,) \cap f(X_2\,) = \varnothing$;

e) $\forall\, X_1\,, X_2 \subseteq A$, $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f(\,X_1 - X_2\,) = f(\,X_1\,) - f(\,X_2\,)$.

32. Considerando as funções $g : A \rightarrow B$ e $f : g(A) \rightarrow C$, mostre que para qualquer $Z \subseteq C$, se tem $[f\,o\,g]^{-1}(\,Z\,) = g^{-1}[\,f^{-1}(\,Z\,)]$.

33. Estude quais das funções dos exercícios **25** , **26** e **27** são injectivas nos respectivos domínios e, para as que o sejam, determine as respectivas inversas especificando convenientemente os seus domínios.

34. Considere a função $f : A = \{(x, y) : x \geq 0 \ , \ 0 \leq y < 2\pi\} \to \mathbf{R}^2$ tal que,

$$f(x, y) = (w, z) \ , \text{ com } w = x \,.\, \cos y \ \text{ e } \ z = x \,.\, \operatorname{sen} y \,.$$

a) Determine $f(A)$ e $f(A_0)$, em que $A_0 = A - \{(0, y) : 0 \leq y < 2\pi\}$;

b) Determine $f^{-1}[\{(0, 0)\}]$;

c) Mostre que, embora f não seja injectiva no seu domínio, é injectiva no conjunto $A_0 \subset A$ referido na alínea a), podendo portanto inverter-se neste conjunto;

d) Determine a função inversa f_0^{-1} da restrição de f a A_0, especificando o respectivo domínio e indicando o modo como se calcula para cada possível ponto (w, z) a respectiva imagem $(x, y) = f_0^{-1}(w, z)$. Determine em particular,

$$f_0^{-1}(1, 1) \ , \ f_0^{-1}(-1, 1) \ , \ f_0^{-1}(1, -1) \ \text{ e } \ f_0^{-1}(-1, -1).$$

35. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$:

$$C = \{(n, y) : n \in \mathbf{N} \wedge y^2 - y - (n + n^2) = 0 \wedge y \geq 0\} \,.$$

a) Determine a secção de C por $y = 2 \in \mathbf{R}$;
b) Mostre que qualquer $n \in \mathbf{N}$ é projecção de um e um só par $(n, y) \in C$;
c) Determine a função $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ que é representada pelo conjunto C.

36. Sabe-se que o conjunto dos números naturais $\mathbf{N}$ com a relação de ordem habitual é bem ordenado, no seguinte sentido : qualquer subconjunto $A \subseteq \mathbf{N}$ tem mínimo . A partir deste resultado defina uma função de selecção que permita escolher um representante de cada conjunto da classe de todos os subconjuntos não vazios de $\mathbf{N}$.

37. Dados $A = [\,0 , 1\,]$ e $B = [\,-1 , 3\,]$, prove que são equipotentes definindo em concreto uma bijecção de A em B .

38. Sendo $K = \{\,1 , 1/2 , 1/2^2 , 1/2^3 , \ldots , 1/2^n , \ldots\}$, considere a função,

$$f(x) = \begin{cases} x & , \ 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ x \notin K \\ x/2 & , \ 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ x \in K \end{cases}$$

e utilize-a para provar que os intervalos $A = [\,0 , 1\,]$ e $B = [\,0 , 1\,[$ são equipotentes.

39. Considere o conjunto P de todos os polinómios inteiros em x cujos coeficientes sejam números racionais.

a) Mostre que se trata de um conjunto numerável;

b) Designando por número algébrico qualquer real que seja zero de um polinómio $p(x) \in P$ não identicamente nulo e atendendo a que um polinómio inteiro de grau k admite no máximo k zeros reais, prove que os números algébricos formam um conjunto numerável.

40. Mostre que $\mathbf{R}^2$ e $A = \{ (x , y) : 0 < x < 1 \ , \ 0 < y < 1 \}$ são equipotentes. Mostre também que o conjunto A referido e o intervalo real $I =]0 , 1[$ são equipotentes. Que conclusão pode tirar sobre a equipotência de $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R}^2$?

41. Responda às questões do exercício anterior, considerando os conjuntos $\mathbf{R}^3$ e $A = \{ (x , y , z) : \ 0 < x < 1 , 0 < y < 1 , 0 < z < 1 \}$.

42. Prove que o conjunto de todas as aplicações de $\{ 0 , 1 \}$ em $\mathbf{N}$ é numerável e que o conjunto de todas as aplicações de $\mathbf{N}$ em $\{ 0 , 1 \}$ não é numerável. Prove ainda que o conjunto de todas as aplicações de um intervalo não degenerado em $\{ 0 , 1 \}$ tem potência superior à do contínuo.

43. Considere uma teoria matemática que tem como termos primitivos "*alfa*" e uma operação "*delta*". Os alfas formam um conjunto G . A operação delta associa a cada par ordenado de alfas (x , y) um e um só alfa que se representa por $x \vartriangle y$. Admita as seguintes definições:

d1 : Chama-se *identidade* do conjunto G dos alfas a qualquer alfa $e \in G$ tal que, $\forall \, a \in G \ , \ a \vartriangle e = e \vartriangle a = a$;

d2 : Chama-se *simétrico* do alfa $a \in G$ a qualquer alfa $a^s \in G$ tal que $a \vartriangle a^s = = a^s \vartriangle a = e$, em que e é um elemento identidade do conjunto G .

Ao axiomas são os seguintes :

a1 : O conjunto G é não vazio ;
a2 : Quaisquer que sejam $a , b , c \in G$, tem-se : $a \vartriangle (b \vartriangle c) = (a \vartriangle b) \vartriangle c$;
a3 : Existe pelo menos uma identidade do conjunto G ;
a4 : Qualquer alfa $a \in G$ admite pelo menos um simétrico .

Deduza então os seguintes teoremas :

t1 : O conjunto G tem um só elemento identidade ;
t2 : Cada alfa têm um só simétrico ;
t3 : $\forall \, a , b , c \in G \ , \ a \vartriangle b = a \vartriangle c \Rightarrow b = c$;
t4 : Quaisquer que sejam os alfas $a , b \in G$, existe um e um só alfa $x \in G$ tal que $a \vartriangle x = b$ e tem-se $x = a^s \vartriangle b$.

44. Considere uma teoria matemática que tem como termos primitivos "*resultado*" e uma função "*medida de incerteza*". Os resultados formam um conjunto Ω . A função medida de incerteza associa a cada subconjunto $A \subseteq \Omega$ um e um só número real $P(A)$.

Ao axiomas são os seguintes :

a1 : $\forall A \subseteq \Omega$, $P(A) \geq 0$;
a2 : $\forall A, B \subseteq \Omega$, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
a3 : $P(\Omega) = 1$.

Pressupondo conhecida a teoria dos números reais , deduza então os seguintes teoremas :

t1 : $P(\varnothing) = 0$;
t2 : $\forall A, B \subseteq \Omega$, $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$;
t3 : $\forall A, B \subseteq \Omega$, $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;
t4 : $\forall A, B \subseteq \Omega$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
t5 : Se $P(A) = 0$, então $P(A \cup B) = P(B)$ e $P(A \cap B) = 0$.

45. Considere uma teoria matemática que tem como termos primitivos "*ponto*" e uma função "*distância*". Os pontos formam um conjunto E . A função distância associa a cada par de pontos x , $y \in E$ um e um só número real $d(x, y)$.

Ao axiomas são os seguintes :

a1 : $\forall x, y \in E$, $d(x, y) \geq 0$;
a2 : $\forall x, y \in E$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
a3 : $\forall x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$;
a4 : $\forall x, y, z \in E$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

Pressupondo conhecida a teoria dos números reais ,

a) Mostre que o axioma **a1** não é independente dos demais, deduzindo-o deles como teorema ;

b) Demonstre o seguinte teorema :

t1 : $\forall x, y, z \in E$, $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$;

c) Demonstre que os axiomas **a3** e **a4** podem ser substituídos pelo seguinte:

a5 : $\forall x, y, z \in E$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$,

o que equivale a provar que **a3** $\wedge$ **a4** $\Leftrightarrow$ **a5** .

RESPOSTAS

1. $\mathsf{B} = \{\varnothing , \{ a \} , \{ b \} , \{ c \} , \{ a , b \} , \{ a , c \} , \{ b , c \} , \{ a , b , c \} \}$.
2. A contido em B.
3. B igual a C ; B e C contidos em A .
5. a) $\{ n : n \in \mathbf{N} \wedge [n \leq 10 \vee n$ é par$] \}$.
b) $\{ n : n \in \mathbf{N} \wedge n \leq 10 \wedge n$ é par $\} = \{ 2 , 4 , 6 , 8 , 10 \}$.
c) $\{ n : n \in \mathbf{N} \wedge n \leq 10 \wedge n$ é ímpar $\} = \{ 1 , 3 , 5 , 7 , 9 \}$.
d) $\{ n : n \in \mathbf{N} \wedge n > 10 \wedge n$ é par $\}$.
e) $\{ n : n \in \mathbf{N} \wedge n > 10 \wedge n$ é par $\}$.
f) $\{ n : n \in \mathbf{N} \wedge n \leq 10 \wedge n$ é ímpar $\} = \{ 1 , 3 , 5 , 7 , 9 \}$.
6. a) $] 1 , 2]$. **b)** $\{ 2 \}$. **c)** $] 1 , 2 [$. **d)** $] 0 , 1]$. **e)** $] -\infty , -1 [\cup] 0 , 2 [\cup] 2 , +\infty [$.
11. a) União = $] 0 , 2]$, Intersecção =$\{ 1 \}$.
b) Limite máximo = Limite mínimo = Limite = $] 0 , 1]$.
12. a) $] -\infty , 1 [\cup] 2 , +\infty [$.
b) Limite máximo = $[1 , 2]$, Limite mínimo = $[1 , 2 [$. Não existe limite .
13. a) Limite máximo = $\mathbf{N}$, Limite mínimo = $\mathbf{N} - \{ 1 , 2 , 4 , 5 \}$. Não existe limite .
b) $\{ 1 , 2 , 4 , 5 \}$.
14. a) $\{ (x , y) : x + y \neq 0 \}$.
b) Limite máximo = $\{ (x , y) : -1 \leq x + y \leq 0 \}$, Limite mínimo = $\{ (x , y) : x + y = 0 \}$. Não existe limite .
15. a) União = $] -1 , 3/2]$, Intersecção =$\{ 0 \}$.
b) Limite máximo = $[0 , 1]$, Limite mínimo = $\{ 0 \}$. Não existe limite .
20. $P = A \cap B$.
21. a) $\{ a , d , e \}$. **b)** $\{ 1 , 2 \}$. **c)** $\varnothing$. **d)** $\{ a , b , d , e \}$. **e)** $\{ 1 , 2 , 3 , 7 , 9 \}$.
22. a) $[-1 , -1/2] \cup [1/2 , 1]$. **b)** $[0 , 1/4]$. **c)** $\{ -1 , 1 \}$. **d)** $\varnothing$.
e) Projecção em $U_1 = [-1 , 1]$, projecção em $U_2 = [0 , 1]$.
23. a) $\{ -1 , 1 \}$. **b)** $\{ (x , y) : x^2 + y^2 = 1 \}$. **c)** $\{ (0 , 0) \}$. **d)** $\{ (x , y) : x^2 + y^2 \leq 1 \}$.
24. b) Por exemplo, $U_1 = U_2 = \mathbf{R}$, $A_1 = [0 , 3]$, $B_1 = [1 , 2]$, $A_2 = [0 , 3]$, $B_2 = [1 , 2]$.
25. a) Imagem directa de $A = \{ -1 \}$, imagem directa de $B = \{ 1 \}$.
b) Imagem inversa de $X_1 = \{ n : n \in \mathbf{N} \wedge n$ é ímpar$\}$, imagem inversa de $X_2 = \varnothing$.
26. a) Imagem directa de $X_1 = [0 , 1[\cup \{ 2\}$, imagem directa de $X_2 = \{ 2 \} \cup [5 , 10]$.
b) Imagem inversa de $\mathbf{R}^+ =] 0 , 1] \cup [2 , +\infty [$, imagem inversa de $] 1 , +\infty [= \{ 1 \} \cup [2 , +\infty [$, imagem inversa de $[0 , 3] = [0 , 1]$.
27. Imagem directa de $X = [0 , 2]$, imagem inversa de $Y_1 = \{ (x , y) : 9/16 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \}$, imagem inversa de $Y_2 = \{ (0 , 0) \}$.
28. b) Com $f(x) = \begin{cases} 0 , & x = 0 \\ 1 , & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ e $X_n = [0 , 1/n]$ tem-se:

$$lim\, X_n = \overline{lim}\ X_n = \underline{lim}\ X_n = \{ 0 \} ,$$

$$f(lim\, X_n) = f(\overline{lim}\ X_n) = f(\underline{lim}\ X_n) = \{ 0 \} ,$$

$$lim\ f(X_n) = \overline{lim}\ f(X_n) = \underline{lim}\ f(X_n) = \{ 0 , 1 \} .$$

33. Só é injectiva a função do exercício 26, sendo a respectiva inversa a função,

$$f^{-1} : f(A) = [0 , 1 [\cup \{ 2 \} \cup [5 , +\infty [\to \mathbf{R} \text{ tal que } f^{-1}(y) = \begin{cases} y & , 0 \leq y < 1 \\ 1 & , y = 2 \\ \sqrt{y-1} & , y \geq 5 \end{cases} .$$

34. a) $f(A) = \mathbf{R}^2$, $f(A_0) = \mathbf{R}^2 - \{(0 , 0)\}$. **b)** $f^{-1}[\{(0 , 0)\}] = A - A_0 = \{(0 , y) : 0 \leq y < 2\pi\}$.
d) O domínio da função inversa f_0^{-1} é $f(A_0) = \mathbf{R}^2 - \{(0 , 0)\}$ e para cada $(w , z) \in f(A_0)$, tem-se, $f_0^{-1}(w , z) = (x , y)$ tal que $x = \sqrt{w^2 + z^2}$, $y \in [0 , 2\pi [$, $cos\, y = w/x$ e $sen\, y = z/x$, e , em particular,

$f_0^{-1}(1, 1) = (\sqrt{2}, \pi/4)$, $f_0^{-1}(-1, 1) = (\sqrt{2}, 3\pi/4)$, $f_0^{-1}(1, -1) = (\sqrt{2}, 7\pi/4)$ e $f_0^{-1}(-1, -1) = (\sqrt{2}, 5\pi/4)$.

35. a) $\{ 1 \}$. **c)** $f(n) = n + 1$.

37. Por exemplo, $f: [0, 1] \to [-1, 3]$ com $f(x) = 4x - 1$.

40. **R** e $\mathbf{R}^2$ são equipotentes .

41. **R** e $\mathbf{R}^3$ são equipotentes .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] VAUGHT , Robert L.
Set Theory : An Introduction
Springer Verlag – 1995

[2] HAMBURGER , Peter ; HAJNAL , Andras
Set Theory
London Mathematical Society – Student Texts 48 – 1999

[3] CAMERON , Peter J.
Sets, Logic and Categories
Springer Undergraduate Mathematics Series – 1999

[4] HALMOS , Paul R.
Naïve Set Theory
Springer Verlag – 1987

[5] RODGERS , Nancy
Learning to Reason: An Introduction to Logic , Sets and Relations
John Wiley & Sons – 2000

[6] LIPSCHUTZ , Seymour
Set Theory and Related Topics
McGraw Hill – 1983

[7] BERNAYS , Paul
Axiomatic Set Theory
Dover Pubns – 1991

[8] STOLL , Robert R.
Set Theory and Logic
Dover Pubns – 1979

[9] BLOCH , Ethan D.
Proofs and Fundamentals : A first course in Abstract Mathematics
Birkhauser – 2000

[10] CUPILLARI , Antonella
The Nuts and Bolts of Proofs
Academic Press – 2001

[11] DIEUDONNÉ , J.
Foundations of Modern Analysis
Academic Press – 1969

[12] DAUBEN , Joseph Warren
Georg Cantor
Prindeton Univ Press – 1990

[13] SUH , Nam P.
Axiomatic Design : Advances and Aplications
Oxford Univ Press – 2001